E-ISSN: 2676-6159 | P-ISSN: 2538-5079

Journal of Decisions and Operations Research

www.journal-dmor.ir

J. Decis. Oper. Res. Vol. x, No. x (xx) x–x.

Paper Type: Original Article

Portfolio Formation Based on Risk-Adjusted Performance and Distribution-Based Returns Using Data Envelopment Analysis

Hosseinali Heydarzadeh[1,*], Fraydoon Rahnamay Roodposhti[2], Alireza Rashidi Komijan[3], Seyyed Esmaeil Najafi[4]

[1] *Department of Industrial Management & amp; Economic, Science and Research Branch, Tehran, Iran; heydarzadeh56@gmail.com.*

[2] *Department of Accounting, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; Roodposhti.rahnama@gmail.com.*

[3] *Department of Industrial Engineering, Firoozkoh Branch, Islamic Azad University, Firoozkoh, Iran.*

[4] *Department of Industrial Engineering, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran; najafi1515@yahoo.com .*

Citation:

LastName, (Initial)., & LastName, (Initial). (Date). Portfolio formation based on risk-adjusted performance and distribution-based returns using data envelopment analysis. *Journal of decisions and operations research, Volume* (Issue), PP.

Received: Reviewed: Revised: Accepted:

Abstract

Purpose: This research aims to construct a portfolio based on risk-adjusted performance and distribution-based returns and determine the efficiency using the Data Envelopment Analysis (DEA) approach. In this study, the role of return distribution in the efficiency of risky assets is also examined to form a diversified portfolio consisting of assets with varying degrees of performance.

Methodology: In this study, the diversified portfolio's performance of 28 firms, during 1398-1402, based on the risk-adjusted value and conditional risk-adjusted value obtained from the probability distributions of returns was compared with the minimum-variance Markowitz portfolio performance in terms of the Sharpe ratio. After estimating the maximum likelihood parameters of the model, the risk values for each stock were calculated based on the empirical return distribution, the Cauchy distribution, and the normal distribution. These risk values were then used in the data envelopment analysis to calculate the efficiency scores of each company.

Findings: The diversified portfolio with stock performance degrees outperforms the minimum-variance Markowitz portfolio in terms of risk-adjusted and conditional risk-adjusted values. The probability distribution of returns leads to different results in calculating stock risk-adjusted value/conditional value, with the empirical return distribution and normal distribution providing a more desirable performance (in terms of the Sharpe ratio) compared to the Cauchy distribution and sample ratios.

Originality/Value: In the literature, an efficient portfolio is usually formed by calculating asset weights in the stock basket so that the Sharpe ratio reaches its maximum value. In the current study, this hypothesis is challenged in favor of the proposed method, which estimates portfolio weights based on the efficiency of risky assets.

Keywords: Value at risk, Efficient portfolio, Probability distribution, Data envelopment analysis.

Corresponding Author:

Licensee. **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (http://creativecommons.org/licenses/by/4.0).

Journal of Decisions and Operations Research

تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات

دوره x، شماره (x)، (xx)، x-x

www.journal-dmor.ir

نوع مقاله: پژوهشی

تشکیل پرتفوی بر اساس کارایی حاصل از ریسک و بازده مبتنی بر توزیع با رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها

حسینعلی حیدرزاده[1]، فریدون رهنمای رودپشتی[2]، علیرضا رشیدی کمیجان[3]، سید اسماعیل نجفی[4]

[1]گروه مدیریت صنعتی، دانشکده مدیریت و اقتصاد، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران.

[2]استاد، دانشکده مدیریت و اقتصاد، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

[3]گروه مهندسی صنایع، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه، فیروزکوه، ایران.

[4]گروه مهندسی صنایع، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران.

چکیده

هدف: هدف پژوهش حاضر تشکیل پرتفوی بر اساس کارایی حاصل از ریسک و بازده مبتنی بر توزیع و تعیین کارایی با استفاده از رویکرد تحلیل پوششی داده‌ها است. در این مطالعه، با هدف تشکیل پرتفویی متشکل از دارایی‌های متنوع‌شده با درجات کارایی، نقش توزیع بازده در درجه کارایی دارایی‌های ریسکی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

روش‌شناسی پژوهش: در این مطالعه، عملکرد پرتفوی متنوع‌شده از درجه کارایی ۲۸ شرکت در بازه زمانی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ بر مبنای ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی حاصل از توزیع‌های احتمالی بازده با عملکرد پرتفوی کمینه واریانس مارکوویتز از نظر نسبت شارپ مورد مقایسه قرار گرفت. پس از برآوردهای حداکثر درستنمایی پارامترهای مدل، مقادیر ریسک هر سهم بر پایه هریک از توزیع‌های احتمال نرمال، کوشی و تجربی بازده محاسبه شد و در تحلیل پوششی داده‌ها، به‌منظور محاسبه درجه کارایی هر شرکت به‌کار گرفته شد.

یافته‌ها: پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام، در هریک از معیارهای ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به پرتفوی کمینه واریانس مارکوویتز عملکرد مطلوب‌تری دارد و توزیع احتمالی بازده در محاسبه ارزش در معرض ریسک/شرطی سهام، منجر به نتایج متفاوتی در عملکرد پرتفوی می‌شوند، به‌طوری‌که برآورد درجه کارایی شرکت‌ها بر پایه توزیع تجربی بازده و توزیع نرمال، عملکرد مطلوب‌تری را (از نظر نسبت شارپ) در مقایسه با توزیع کوشی و نسبت‌های نمونه‌ای ارایه می‌دهد.

اصالت/ارزش افزوده علمی: در ادبیات موضوع، تشکیل یک پرتفوی کارا عموما با محاسبه اوزان دارایی‌ها در پرتفوی سهام انجام می‌شود، به‌گونه‌ای که نسبت شارپ در پرتفوی به بیش‌ترین مقدار خود برسد. در مطالعه حاضر، این فرضیه رقیب برای روش جاری طرح می‌شود که برای تشکیل یک پرتفوی سهام کارا، می‌توان اوزان پرتفوی را بر اساس میزان کارایی دارایی‌های ریسکی برآورد نمود.

کلیدواژه‌ها: ارزش در معرض ریسک، پرتفوی کارا، توزیع احتمال، تحلیل پوششی داده‌ها.

* نویسنده مسئول

۱- مقدمه

نظریه نوین پورتفوی توسط هری مارکوویتز [1] اقتصاددان آمریکایی و برنده جایزه نوبل در دهه ۱۹۵۰ ایجاد شد. او بر اساس مفهوم بهینه‌سازی پورتفوی، تحلیل میانگین واریانس را توسعه داد که اساس نظریه نوین پورتفوی را تشکیل می‌دهد. مارکوویتز [1] در مطالعه‌ای رابطه معکوس بین تنوع پرتفوی، ریسک و بازده مورد انتظار در شکل‌گیری پرتفوی سرمایه‌گذاران را مطالعه کرد و مفهوم پورتفوی کارا را معرفی کرد [2]. بر اساس این مفهوم، پرتفوی‌هایی که بالاترین بازده مورد انتظار را برای یک سطح معین از ریسک یا کم‌ترین سطح ریسک را برای بازده مورد انتظار معین ارایه می‌کنند، کارا شناخته می‌شوند. بااین‌حال، یافتن یک راه‌حل ریاضی برای تشکیل یک پرتفوی بهینه متشکل از تعداد زیادی دارایی کار بسیار دشواری است؛ بنابراین، برای محاسبه بازده مورد انتظار اوراق بهادار در شرایط ریسک مشخص، به‌جای بازده پرتفوی، مدل‌هایی برای برآورد بازده مورد انتظار از دارایی‌ها ایجاد شدند [3]. به‌طور خاص، شارپ [4] مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه را برای تخمین بازده بالقوه سرمایه ایجاد کرد. در ادامه مطالعه او، مارکوویتز [5] ضریب شارپ را توسعه داد که برای ارزیابی کارایی پرتفوی سرمایه‌گذاری طراحی شده بود. در این مطالعات، نسبت شارپ به صورت میزان بازده اضافی‌ای تعریف می‌شود که به ازای هر واحد ریسک اضافی ایجاد می‌گردد [6].

مطالعات بر روی پرتفوی کارا تحت نظریه نوین پرتفوی و پس از مطالعه شارپ مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفت و مطالعات متعددی در خصوص روش‌های بهینه‌سازی پرتفوی با هدف افزایش کارایی انجام شده است؛ اما باید توجه داشت که تشکیل یک پرتفوی کارا در ادبیات تحقیق، عموما با محاسبه اوزان دارایی‌ها در پرتفوی سهام انجام می‌شود، به‌گونه‌ای که نسبت شارپ در پرتفوی به بیش‌ترین مقدار خود برسد [7]. این در حالی است که در این مطالعه، یک فرضیه رقیب برای این روش طرح می‌شود یعنی برای تشکیل یک پرتفوی سهام کارا می‌توان اوزان پرتفوی را بر اساس میزان کارایی دارایی‌های ریسکی برآورد نمود. به‌بیان‌دیگر، سهم هر دارایی ریسکی در پرتفوی سرمایه‌گذاری بر اساس درجه‌ای از کارایی آن (برحسب ریسک و بازده) تعیین شده که منجر به تشکیل پرتفویی متنوع از ضرایب کارایی دارایی‌های ریسکی می‌شود.

در راستای توسعه و بهبود نظریه نوین پرتفوی، روش‌های متعددی برای سنجش بازده مورد انتظار سرمایه‌گذاری و ریسک پرتفوی ارایه و مورد بحث قرار گرفتند. در این میان، ارزش در معرض ریسک[1] و ارزش در معرض ریسک شرطی[2] را می‌توان دو مورد از شناخته‌شده‌ترین معیارهای سنجش ریسک به شمار آورد [8]. اگرچه روش‌هایی چون تلاطمات زمان-متغیر بازده تحت مدل‌های واریانس ناهمسان شرطی، انحراف معیار بازده در طول یک دوره مشخص و روش‌های دیگر را می‌توان گزینه‌های رقیب برای ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی در سنجش ریسک یک دارایی به شمار آورد [9]. اما روش ارزیابی ریسک مبتنی بر ارزش در معرض ریسک/شرطی با تکیه بر توزیع احتمالی بازده سهام، تحلیل رفتار قیمت و بازده را در چارچوب نظری مدل‌های قیمت‌گذاری مستحکم‌تر می‌کنند [10]. به‌بیان‌دیگر، می‌توان با تشخیص و اتکا به توزیع احتمالی بازده سهام، ریسک حاصل از سرمایه‌گذاری را در قالب ارزش در معرض ریسک یا ارزش در معرض ریسک شرطی تبیین نمود، به‌طوری‌که حداکثر زیان مورد انتظار سرمایه‌گذار نیز لحاظ گردد. ازاین‌رو، این دو معیار ریسک، در مقایسه با سایر روش‌های ارزیابی ریسک از جایگاه بالایی در ادبیات تشکیل پرتفوی برخوردار شده‌اند.

در این مطالعه، با هدف تشکیل پرتفویی متشکل از دارایی‌های متنوع‌شده با درجات کارایی، نقش توزیع بازده در درجه کارایی دارایی‌های ریسکی نیز مورد مطالعه قرار می‌گیرد. این مطالعه در پی آن است که نشان دهد مشکلات نظری حاکم بر روش‌های سنتی نظیر اهمیت برآورد تابع کواریانس بازده‌های سهام، کارایی این روش‌ها را در بازارهای سرمایه مختلف با تردید مواجه می‌سازد؛ درحالی‌که استفاده از معیارهای متفاوت ریسک و لحاظ کردن درجه کارایی واحدهای تصمیم، پیش از تشکیل پرتفوی سهام، می‌تواند پرتفوی کاراتری را از نظر نسبت شارپ منجر شود. برای این منظور، توزیع تجربی بازده، توزیع نرمال و توزیع کوشی (به‌عنوان یک توزیع با دم سنگین) برای بازده سهام تصور می‌شود و تحت هریک از این توزیع‌ها، مقادیر ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی برای سهام تشکیل‌دهنده پرتفوی محاسبه می‌شود. پس از تعیین درجه کارایی دارایی‌ها در پرتفوی سهام، با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها، وزن هر دارایی در پرتفوی بر اساس درجات کارایی نرمال‌شده تعیین می‌شود و عملکرد پرتفوی در دوره‌های نگهداری مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. بر این اساس، مساله اصلی تحقیق حاضر بررسی این است که عملکرد پرتفوی متنوع‌شده بر پایه درجه کارایی واحدهای

[1] Value at Risk (VaR)

[2] Conditional Value at Risk (CVaR)

تشکیل‌دهنده آن در مقایسه با پرتفوی کمینه واریانس مارکوویتز چگونه است و آیا توزیع احتمالی بازده دارایی‌ها در حصول نتایج مختلف ازاین‌روش تاثیرگذار است؟

۲- چارچوب نظری و پیشینه پژوهش

۲-۱- چارچوب نظری

هدف از پرتفوی سرمایه‌گذاری اوراق بهادار، ایجاد یک پرتفوی متنوع از دارایی‌ها با هدف کاهش ریسک سرمایه‌گذاری و به حداکثر رساندن بازده سرمایه‌گذاران است [11]. پرتفوی سرمایه‌گذاری مجموعه‌ای از دارایی‌های مالی است که از ترکیبی از اوراق بهادار مختلف، یعنی سهام، اوراق قرضه و مشتقات مالی تشکیل شده که رایج‌ترین جزو یک پرتفوی سرمایه‌گذاری هستند [12]. هدف از تشکیل پرتفوی اوراق بهادار، ایجاد پرتفویی با مشخصات ریسک-بازده متفاوت از هریک از دارایی‌ها است. تئوری نوین پورتفوی نیز با در نظر گرفتن رابطه بین دارایی‌های مختلف و تنوع آن‌ها، رویکردی سیستماتیک برای بهینه‌سازی ریسک و بازده مورد انتظار پرتفوی ارایه می‌کند [13]. «تئوری نوین پرتفوی و تحلیل سرمایه‌گذاری[۱]» شامل مبانی نظری بسیاری از مدل‌ها مانند مدل‌های تک‌عاملی، مدل‌های چندعاملی و تئوری قیمت‌گذاری آربیتراژ[۲] و مبانی علمی و ریاضی آن است که برای تشکیل یک پرتفوی بهینه ضروری است [14].

رویکرد تشکیل پورتفوی مارکوویتز بر این فرض استوار است که میانگین و واریانس داده‌ها برای تصمیم‌گیری منطقی در شرایط عدم قطعیت، شناسایی بهترین فرصت و تشکیل مرز کارا (جایی که بازده برای سطح معینی از ریسک به حداکثر می‌رسد، یا ریسک را به حداقل می‌رساند) کافی است [15]. دو پارامتر موردنیاز در این تحلیل عبارت‌اند از: ۱- بازده مورد انتظار پورتفوی با در نظر گرفتن مجموع وزن‌های دارایی‌ها و ۲- انحراف استاندارد پرتفوی بر پایه مجموع کوواریانس‌های وزنی دارایی‌ها.

$$\mu_P = E^T w. \qquad (۱)$$

$$\sigma_P^2 = w^T \Sigma w. \qquad (۲)$$

$$w^T 1 = 1. \qquad (۳)$$

به‌طوری‌که در آن، $E = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]$ یک بردار با ابعاد $N\times1$ و معرف بردار بازده مورد انتظار مجموعه اوراق بهادار است. Σ ماتریس کوواریانس $N\times N$ برای بازده‌های دارایی‌های مورد نظر در تشکیل پرتفوی است و $w = [w_1, w_2, \dots, w_N]$ بردار اوزان دارایی‌ها و یک بردار ستونی واحد است [5].

مجموع اوزان در **رابطه (۳)** نشان می‌دهد که پرتفوی به‌طور کامل سرمایه‌گذاری شده است. با این تعریف، می‌توان تعداد نامتناهی پرتفوی میانگین-واریانس کارا ساخت؛ اما تصمیم بهینه در انتخاب پرتفوی بر پایه تحمل ریسک سرمایه‌گذاران تعیین می‌شود. تابع هدف کلی بهینه‌سازی پورتفوی مارکوویتز به شکل **رابطه (۴)** تعریف می‌شود [16].

$$Min\ w^T \Sigma w - \lambda E^T w, \qquad (۴)$$

که در آن، λ ضریب ریسک‌گریزی نسبی سرمایه‌گذار است. توصیف دقیق ریسک پرتفوی مستلزم برآورد دقیق ماتریس کوواریانس بازده اوراق بهادار (Σ) است. درحالی‌که برآورد دقیق ماتریس کواریانس بازده‌های سهم با توجه به وابستگی مورد انتظار بازده دارایی‌ها در وقفه‌های پسرو و پیشروی مختلف، عموما با خطاهای بزرگ همراه است [17]. بنابراین، در مساله بهینه‌سازی پرتفوی تحت مدل مارکوویتز، یکی از مهم‌ترین مشکلات عبارت است از ارایه برآورد دقیق از ماتریس کواریانس بازده دارایی‌های مورد نظر که می‌تواند نتایج عملکردی پرتفوی را با تردید مواجه سازد. اگرچه به‌طور غالب، محققان این ارتباط را در وقفه صفر مورد برآورد قرار می‌دهند و سایر وقفه‌های ارتباطی پسرو و پیشرو بین بازده دارایی‌ها لحاظ نمی‌شود [18].

[۱] Modern portfoliotheory and investment analysis

[۲] Arbitrage Pricing Theory (APT)

با توجه به این مهم، در مساله بهینه‌سازی پرتفوی با حداقل واریانس، انتظار بر این است که بتوان روش‌های رقیب و جایگزین برای تشکیل پرتفویی کارا ارایه داد که کاستی‌های روش‌های سنتی تشکیل پرتفوی را برطرف سازد.

یک فرضیه برای بهبود مساله بهینه‌سازی پرتفوی کارا، استفاده از درجات کارایی دارایی‌های پایه در برآورد اوزان پرتفوی است. در این روش، محدودیت پیشین در برآورد ماتریس کواریانس بازده دارایی‌های پایه وجود ندارد و درواقع، عملکرد دارایی‌های پایه از نظر ریسک و بازده، در مقایسه با یکدیگر قرار گرفته و میزان کارایی آن‌ها به‌طور وابسته به یکدیگر برآورد می‌شود. انتظار بر این است که هر دارایی پایه با درجه بالاتر کارایی، وزن و سهم بیش‌تری در پرتفوی سرمایه‌گذاری به خود تخصیص دهد و بر این اساس، تشکیل پرتفوی و برآورد اوزان دارایی‌ها با هدف ماکسیمم‌سازی درجه کارایی پرتفوی اتفاق می‌افتد؛ بنابراین، می‌توان انتظار داشت که یک روش برای افزایش میزان کارایی پرتفوی (کاهش ریسک به ازای بازده مشخص)، کاهش وزن دارایی‌های با کارایی کم‌تر و افزایش وزن دارایی‌های با کارایی بیش‌تر در **رابطه (۲)** باشد که منجر به واریانس پرتفوی متنوع شده با درجه کارایی می‌شود.

مساله تشکیل پرتفوی کارا در این مطالعه، معادل با سنجش درجه کارایی دارایی‌های پایه برحسب نسبت ریسک و بازده است که منجر به برآورد مقداری بین صفر و یک برای میزان کارایی هریک از دارایی‌ها خواهد شد؛ اما با توجه به این‌که شواهد مختلفی از توزیع حاکم بر بازده در مطالعات پیشین مستند شده به‌عنوان‌مثال تحقیق ژیائو و همکاران [19] و چیزاک و نیلسن [20]، به‌نظر می‌رسد که برآورد ریسک هر دارایی پایه با توجه به ارزش در معرض ریسک/شرطی آن نیازمند ارزیابی‌های چندجانبه بر روی توزیع‌های احتمالی حاکم بر بازده است. ازاین‌رو، در مطالعه حاضر از سه توزیع نرمال، کوشی و توزیع تجربی بازده‌ها برای محاسبه این دو معیار ریسک استفاده شده است تا عملکرد روش تشکیل پرتفوی کارا، برحسب توزیع احتمالی بازده‌ها نیز مورد ارزیابی قرار گیرد. بر این اساس، مطالعه حاضر دارای دو فرضیه است که عبارت‌اند از:

فرضیه ۱- پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام، نسبت به پرتفوی با حداقل واریانس عملکرد مطلوب‌تری دارد.

فرضیه ۲- توزیع احتمالی بازده در محاسبه ارزش در معرض ریسک/شرطی سهام، منجر به نتایج متفاوتی در عملکرد پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام می‌شود.

۲-۲- پیشینه پژوهش

در خصوص روش‌های تشکیل پرتفوی کارا مطالعات متعددی در سال‌های اخیر انجام شده است. به‌عنوان‌مثال، کارامونوویچ [21] در تحقیقی به تجزیه‌وتحلیل پرتفوی کارا بر اساس نظریه نوین پورتفوی پرداخته است. او با تحلیل دو سهام شرکت اپل و مایکروسافت نشان می‌دهد که حصول پرتفوی کارا نیازمند برآورد دقیق بازده مورد انتظار بر اساس بازده بازار است و با تقسیم وزن پرتفوی به‌طور یکسان، در این دو دارایی می‌توان بیش‌ترین نسبت شارپ برای پرتفوی را به‌دست آورد، درحالی‌که ریسک‌های هریک از این دارایی‌ها یکسان نبوده‌اند.

الکساندر و چرر [18] در تحقیقی به مقایسه پیش‌بینی پرتفوی‌های مماس و سرمایه‌گذاری در پرتفوی حداقل فاصله اقلیدسی باهدف به حداکثر رساندن نسبت‌های شارپ خارج از نمونه پرداخته‌اند. در این مطالعه، آن‌ها مرز کارا را با تجزیه شکل عملکردی آن (ریشه دوم یک چندجمله‌ای مرتبه دوم)، به سه ضریب قابل تفسیر، تجزیه کردند که می‌توان از آن برای محاسبه پرتفوی مماس با مرز کارا استفاده کرد. پرتفوی سرمایه‌گذاری، بر اساس حداقل فاصله اقلیدسی پرتفوی از مرز کارا تشکیل شده و نتایج نشان داده که برخلاف پرتفوی مارکوویتز که فقط زمانی که بازده‌ها و کوواریانس‌های آتی ثابت هستند (و می‌توان مستقیما با داده‌های تاریخی تخمین زد که اغلب در داده‌های خارج از نمونه وجود ندارد)، نسبت شارپ را به حداکثر می‌رساند. این رویکرد، به‌جای تخمین بازده و کوواریانس، با تشخیص پرتفوی مماس، این نقص را به روشی کارآمد برطرف می‌کند؛ بنابراین، در این مطالعه نیز اهمیت برآورد کواریانس بازده مورد توجه بوده است.

باتلر و اون [22] در تحقیقی به یکپارچه‌سازی پیش‌بینی در بهینه‌سازی پرتفوی میانگین واریانس پرداخته‌اند. در این مطالعه، آن‌ها یک چارچوب بهینه‌سازی تصادفی برای ادغام مدل‌های پیش‌بینی رگرسیونی در یک الگوی بهینه‌سازی میانگین واریانس ارایه داده‌اند. در این راستا، چندین شبیه‌سازی با استفاده از داده‌های مصنوعی ارایه شده و نتایج تحقیق نشان داد که رویکرد یکپارچه در مقایسه با روش‌های

سنتی تشکیل پرتفوی مارکوویتز، عملکرد بهتری دارد. یافته‌های این مطالعه، دلالت بر کاستی‌های قابل ملاحظه و برجسته در مدل‌های سنتی تشکیل پرتفوی دارد.

جنسن و همکاران [23] در تحقیقی به بررسی نقش یادگیری ماشین در مرز کارای قابل اجرا در تشکیل پرتفوی پرداخته‌اند. در این مطالعه، چارچوبی توسعه داده شده که با ادغام دو رویکرد بهینه‌سازی پورتفوی آگاه از هزینه تجارت و یادگیری ماشین، مرزی کاراتر ایجاد می‌کند. این مدل معیار جدیدی از اهمیت ویژگی‌های اقتصادی را در تشکیل پرتفوی مطرح می‌کند و نشان می‌دهد که عملکرد اقتصادی دارایی‌های پایه نقش اساسی در عملکرد پرتفوی نهایی ایفا می‌کنند.

رسول‌زاده و همکاران [24] در تحقیقی به ارایه یک رویکرد چندهدفه مبتنی بر مدل‌های کارایی متقابل مارکوویتز و تحلیل پوششی داده‌ها برای مساله انتخاب پورتفوی فازی پرداخته‌اند. در این مطالعه، به‌منظور کنترل نااطمینانی محیطی، از ابزار فازی شهودی استفاده شده و یک ترکیب از مدل مارکوویتز و مدل‌های متقاطع تحلیل پوششی داده‌ها پیشنهاد شده است. مدل پیشنهادی با استفاده از الگوریتم ژنتیک مرتب‌سازی غیرغالب *II* (*NSGA-II*) حل شده و نتایج به‌دست‌آمده نشان‌دهنده اثربخشی مدل پیشنهادی است.

سلیمانی و وثیقی [25] در تحقیقی ساخت پرتفوی کارا با استفاده از تجزیه‌وتحلیل خوشه‌بندی *CVaR* و الگوریتم *k*-میانگین را مورد مطالعه قرار داده‌اند. آن‌ها از ارزش در معرض ریسک *VaR* و ارزش در معرض ریسک شرطی *CVaR* به‌عنوان ابزارهایی برای کنترل ریسک در دارایی‌های پایه استفاده کرده و نشان داده‌اند که تکنیک خوشه‌بندی *k*-میانگین به‌خوبی برای خوشه‌بندی بازده سهام عمل می‌کند و معیارهای ریسک *VaR* و *CVaR* پرخطرترین و کم‌خطرترین گروه‌های سهام را پیدا می‌کنند.

دای و کانگ [26] در تحقیقی برخی از مدل‌های جدید انتخاب پرتفوی میانگین واریانس کارا را مورد مطالعه قرار داده‌اند. هدف این مطالعه، پیشنهاد مدل‌های جدید انتخاب پرتفوی میانگین واریانس کارا با در نظر گرفتن جنبه‌های زیر بوده است: ۱- استفاده از تنظیم L_1 در تابع هدف برای به دست آوردن پرتفوی پراکنده، ۲- استفاده از برآوردگرهای انقباضی برای تخمین ماتریس کوواریانس، ۳- استفاده از روش بهینه‌سازی قوی برای کاهش خطاهای تخمین بازده مورد انتظار. درنهایت، تحلیل تجربی این تحقیق نشان می‌دهد که استراتژی‌های پیشنهادی عملکرد بهتری نسبت به روش سنتی مارکوویتز در مشاهدات خارج از نمونه داشته‌اند.

در مطالعات انجام شده در داخل کشور نیز، تقی‌زادگان و همکاران [27] در مطالعه‌ای به مقایسه عملکرد مدل‌های مارکوویتز و مدل ارزش در معرض ریسک بر اساس ریسک عدم نقدشوندگی-تی‌کاپولا با هم‌بستگی شرطی پویا[1] جهت بهینه‌سازی پرتفوی در بورس اوراق بهادار تهران پرداخته‌اند. یافته‌های این پژوهش حاکی از آن است که هرچه مقدار ارزش در معرض ریسک بیش‌تر می‌شود، مقدار شارپ مدل *DCC-tCopula-LVaR* در مقایسه با مدل مارکوویتز کاهش می‌یابد. این یافته‌ها نشان از اثر قابل توجه ارزش در معرض ریسک در برآورد ریسک پرتفوی داشته است.

ناطقیان و همکاران [28] در تحقیقی به ارزیابی مدل‌های پرتفوی سرمایه‌گذاری در صندوق‌های سرمایه‌گذاری مشترک در بازارهای مالی جهانی با تاکید بر الگوریتم فرا ابتکاری چندهدفه پرداخته و نتایج پژوهش ایشان نشان داد که مدل *ARIMA*-ارزش در معرض ریسک (شبیه‌سازی تاریخی) مرز کارای بالاتری در مقایسه با *ARIMA*-ارزش در معرض ریسک (شبیه‌سازی مونت کارلو) دارد.

صداقتی و همکاران [29] در تحقیقی به مقایسه کارایی پرتفوی بهینه مبتنی بر ارزش در معرض ریسک و پتانسیل مطلوب با مدل‌های متعارف پرداخته و نتایج مطالعه آن‌ها نشان داد روزآمدسازی مدل، مرز کارا و هم‌چنین استفاده از معیار ارزش در معرض ریسک و توجه به گرایش‌های سرمایه‌گذار از نظر تمایل به پتانسیل‌های مطلوب و ریسک‌گریزی منجر به بهبود کارایی پرتفوی بهینه می‌شود.

کاظمی راشنانی و همکاران [9] در مطالعه‌ای، مدیریت پرتفوی متشکل از انواع دارایی ریسکی و درآمد ثابت با مدل‌های مبتنی بر ارزش در معرض ریسک در بازار ایران را بررسی کرده‌اند. در این تحقیق، عملکرد مدل‌های توسعه‌یافته مبتنی بر ارزش در معرض ریسک با مدل‌های میانگین-واریانس، میانگین-نیم‌واریانس و میانگین-قدرمطلق انحرافات مقایسه شده است. نتایج به‌دست‌آمده از این مدل‌ها

[1] DCC t-Cupola LVaR

حاکی از آن است که سنجه ارزش در معرض ریسک شرطی چه در حضور محدودیت‌ها و چه بدون حضور آن‌ها، نسبت به سایر سنجه‌های ریسک عملکرد بهتری در مدیریت پرتفوی متشکل از انواع دارایی دارد.

عیوضلو و همکاران [30] در تحقیقی، ردیابی شاخص را با استفاده از معیار ارزش در معرض ریسک شرطی ترکیبی دو دنباله‌ای در بورس اوراق بهادار تهران مورد مطالعه قرار داده‌اند. نتایج صحت بازسازی عملکرد شاخص حاکی از آن است که پرتفوی‌های حاصل‌شده از مدل اصلی، در بازسازی عملکرد شاخص موفق عمل کرده‌اند. هم‌چنین، نتایج آزمون نسبت اطلاعاتی و خطای ردیابی نشان می‌دهد که میان مدل اصلی و مدل رقیب تفاوت معناداری وجود ندارد. این نتایج نشان‌دهنده اهمیت ارزش در معرض ریسک شرطی در ردیابی شاخص و حصول عملکرد مطلوب‌تر برای پرتفوی است.

رمضانیان و همکاران [12] در تحقیقی، به تعیین پرتفوی بهینه سرمایه‌گذاری صندوق‌های بازنشستگی در ایران پرداخته است. در این تحقیق، جهت تجزیه‌وتحلیل داده‌ها، از مدل‌های مارکوویتز و ارزش در معرض ریسک استفاده شده است. نتایج مدل تحقیق بیانگر این است که پرتفوی مارکوویتز بهتر از پرتفوی VaR و واقعی جهت سرمایه‌گذاری در صندوق بازنشستگی است.

۳- روش‌شناسی

این پژوهش از نظر هدف، از دسته پژوهش‌های کاربردی به شمار می‌رود و از نظر روش، پژوهشی توصیفی است. داده‌های موردنیاز از گزارش‌های انتشاریافته سازمان بورس و اوراق بهادار جمع‌آوری شده است. جامعه آماری این پژوهش شامل کلیه شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس اوراق بهادار تهران و فعال در گروه محصولات شیمیایی است که طی سال‌های ۱۳۹۸ تا ۱۴۰۲ در بورس فعال بوده و سهام آن‌ها مورد معامله قرار گرفته است. تعداد کل این نمادها برابر با ۸۳ نماد بوده است که از آن میان، نمادهای حق تقدم (۳۵ نماد) و نمادهای سرمایه‌گذاری (٤ نماد) به دلیل ماهیت متفاوت ارزش‌گذاری دارایی و سهام در آن‌ها و هم‌چنین نمادهایی که سهام آن‌ها در کل دوره تحقیق مورد معامله نبوده (١٦ نماد) از تحلیل خارج شده‌اند و درنهایت تعداد ۲۸ نماد مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

به‌منظور تشکیل پرتفوی بر پایه تحلیل پوششی داده‌ها و درجه کارایی دارایی‌های پایه بدین شکل عمل شده است:

گام ۱ – محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی دارایی‌های پایه به‌عنوان معیارهای ریسک دارایی.

در این گام، برای محاسبه ارزش در معرض ریسک، ابتدا یک تابع زیان تعریف می‌شود. تابع زیان در این تحقیق به پیروی از مطالعه حمدی و همکاران [31] برابر با بزرگ‌ترین بازده منفی سهم در نظر گرفته شده است؛ یعنی

$$f_i = -r_i. \qquad (۵)$$

بنابراین، برای محاسبه تابع زیان که نشان‌دهنده زیان احتمالی سرمایه‌گذاری در آینده است، یک سناریو از بدترین وضعیت ممکن برای هر سهم مشخص شده است. بدترین سناریو برای بازده آتی هر سهم وضعیتی خواهد بود که سهم بزرگ‌ترین بازده منفی خود را که تاکنون تجربه کرده است داراست؛ بنابراین، مقدار r_i در این رابطه برابر با اندازه بزرگ‌ترین بازده منفی مشاهده‌شده برای سهم i در دوره قبل از ورود به سرمایه‌گذاری است که ممکن است در پایان دوره سرمایه‌گذاری نیز مشاهده شود.

در تعریف ارزش در معرض ریسک، اگر f_i تابع زیان حاصل از سرمایه‌گذاری در سهم i باشد، و $F(\eta)$ معرف تابع توزیع تجمعی f_i در نقطه η باشد، آنگاه ارزش در معرض ریسک سرمایه‌گذاری در این سهم در سطح اطمینان β برابر است با:

$$\eta_\beta = \min_{\eta \in \mathbb{R}} \{F(\eta) \geq \beta\}. \qquad (۶)$$

بنابراین، ارزش در معرض ریسک η_β برابر است با اولین نقطه‌ای در تابع توزیع تجمعی احتمال تابع زیان سرمایه‌گذاری که در شرایط زیر صدق کند:

$$F\ \eta) = P\left[f_i \le \eta_\beta\right] = \beta. \qquad (۷)$$

ارزش در معرض ریسک η_β برابر با چندک β درصد توزیع تابع زیان تحت توزیع احتمال تجمعی ($F\ \eta$ است و معرف مقداری است که زیان سرمایه‌گذاری با احتمال β از آن مقدار η_β کم‌تر خواهد بود.

ازاین‌رو، با آگاهی از توزیع بازده تحت هریک از روش‌های توزیع نرمال، کوشی یا توزیع تجربی، می‌توان ارزش در معرض ریسک هر سهم را در سطوح اطمینان معینی محاسبه کرد.

ارزش در معرض ریسک شرطی نیز برابر با مقدار مورد انتظار تابع زیان f_i تحت این شرط است که مقدار آن از ارزش در معرض ریسک η فراتر رود، یعنی

$$\varphi = E[f_i | f_i > \eta]. \qquad (۸)$$

روکافلر و اوریاسف [32] نشان داده‌اند که در یک سناریوی سرمایه‌گذاری، می‌توان ارزش در معرض ریسک شرطی را به‌صورت **رابطه (۹)** محاسبه کرد.

$$\varphi = \min_{\eta} \left\{ \eta + \frac{1}{1-\beta} E\left[max\{0, f_i - \eta\}\right] \right\}. \qquad (۹)$$

یعنی ارزش در معرض ریسک شرطی به‌ازای مقداری از η حاصل می‌شود که عبارت فوق را مینیمم سازد. درنتیجه، در این حالت نیز، توزیع بازده سهام نقش تعیین‌کننده‌ای در محاسبه φ خواهد داشت که مطابق با آنچه که پیش‌تر اشاره شد، سه توزیع نرمال، کوشی و توزیع تجربی داده‌ها برای محاسبه این مقدار امید ریاضی استفاده می‌شود. در هریک از این توزیع‌ها، برآورد پارامترهای توزیع به شیوه‌ای متفاوت انجام می‌شود، به‌طوری‌که برآورد پارامترهای توزیع نرمال و توزیع کوشی بر پایه ماکسیمم‌سازی تابع درستنمایی توزیع به‌دست می‌آید. هم‌چنین در توزیع تجربی، بازده از چندک‌های برآوردشده توزیع برای محاسبه معیارهای ارزش در معرض ریسک و سپس، ارزش در معرض ریسک شرطی بر پایه **رابطه (۹)** بهره گرفته می‌شود.

گام ۲- محاسبه درجه کارایی دارایی‌های پایه بر اساس تحلیل پوششی داده‌ها.

در محاسبه درجه کارایی دارایی‌های پایه از تحلیل پوششی داده‌ها با رویکرد بازده ثابت نسبت به مقیاس ورودی محور استفاده شد. در این تحلیل، بازده مورد انتظار (ER_j) به‌عنوان ستاده تحلیل بر پایه بزرگ‌ترین بازده مثبت هر سهم طی دوره مورد مطالعه در نظر گرفته می‌شود و از ارزش در معرض ریسک (η_j) و ارزش در معرض ریسک شرطی (φ_j) به‌عنوان نهاده‌های تحلیل استفاده خواهد شد؛ بنابراین، مساله تعیین درجه کارایی هریک از دارایی‌های پایه معادل با حل برنامه خطی زیر است:

$$Max\ \theta_j = \frac{uER_j}{v\eta_j}\ , \qquad 0 \le \theta_j \le 1\ ,\ \ j = 1, \dots, n. \qquad (۱۰)$$

$$Max\ \theta_j = \frac{uER_j}{v\varphi_j}\ , \qquad 0 \le \theta_j \le 1\ ,\ \ j = 1, \dots, n. \qquad (۱۱)$$

درنتیجه، برآورد مقادیری از u و v که منجر به ماکسیمم‌سازی مقدار کارایی θ_j شود، هدف برنامه خطی فوق است.

گام ۳- محاسبه اوزان پرتفوی بر پایه درجه کارایی دارایی‌های پایه.

در این گام، اوزان پرتفوی برحسب درجه کارایی نرمال‌شده سهام تعیین می‌شود، به‌طوری‌که اگر $\theta = [\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n]$ معرف مقادیر کارایی تعداد n سهم در پرتفوی باشد، آنگاه بردار اوزان پرتفوی برابر است با:

$$w_j = \frac{\theta_j}{\sum_{i=1}^{n} \theta_i}, \quad j = 1, \dots, n. \qquad (۱۲)$$

و داریم

$$w_j \geq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

گام ۴- مقایسه عملکرد پرتفوی مبتنی بر کارایی با پرتفوی مارکوویتز.

در این گام، پس از تشکیل پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری به روش پیشنهادی تحقیق و روش مینیمم واریانس مارکوویتز، عملکرد پرتفوی‌ها در دوره‌های نگهداری ۳، ۶ و ۱۲ ماهه مورد مقایسه قرار می‌گیرد. تجزیه‌وتحلیل داده‌های پژوهش با استفاده از نرم‌افزار *R* ویرایش ۴٫۱٫۳ و کتابخانه‌های *nlm* و *rDEA* انجام می‌شود.

۴- یافته‌ها

جدول ۱، شاخص‌های تمرکز و پراکنش بازده‌های لگاریتمی سهام نمادهای مورد مطالعه را نشان می‌دهد.

جدول ۱- توصیف بازده لگاریتمی سهام شرکت‌ها.

Table 1- Description of the logarithmic returns of companies' stocks.

نماد	میانگین	میانه	انحراف معیار	کمینه	بیشینه	چولگی	کشیدگی
پارس	-0.0023	0	0.1531	-4.3748	0.2379	-27.7813	793.4147
پارسان	0.0024	0.000329	0.0265	-0.1213	0.1710	0.1378	5.2188
پاکشو	-0.0018	0	0.0937	-2.4852	0.0888	-22.9752	594.9703
پترول	0.000179	0	0.0539	-0.7998	0.7057	-1.0874	120.4971
تاپیکو	0.001798	0	0.0286	-0.2015	0.1627	-0.3755	8.3294
جمپلین	0.005665	0	0.1103	-0.1607	3.1135	26.6640	751.2536
جم	0.001331	0	0.0244	-0.2586	0.0947	-1.6971	21.6534
خراسان	0.002572	0	0.0248	-0.1548	0.0790	-0.4098	5.6347
سپاکسا	-0.00183	0	0.0794	-2.1431	0.0733	-23.3943	631.4565
سپدیس	0.003098	0	0.0256	-0.0895	0.0962	0.0118	3.0801
شاراک	0.001965	0.000768	0.0280	-0.1650	0.0956	-0.5981	5.7533
شاملا	-0.00147	-0.00064	0.0651	-1.0972	0.6741	-8.2101	149.4924
شپارس	0.000083	0	0.0368	-0.3982	0.2976	-3.3780	43.1443
شخارک	-0.0002	0	0.0445	-1.0986	0.2099	-17.8821	443.2675
شدوص	0.001339	-0.00045	0.0390	-0.5755	0.4023	-3.5373	80.0348
شسینا	-0.00289	0	0.1265	-3.1526	0.0629	-20.9273	490.8792
شفارس	-0.00137	0	0.1062	-2.9414	0.0664	-25.3552	701.7418
شفان	-0.00271	0	0.1211	-3.4051	0.0544	-26.5029	743.4856
شکربن	-0.002	0	0.1163	-3.2408	0.2867	-25.7684	718.5151
شکلر	0.000945	0	0.0389	-0.6929	0.0936	-6.7353	121.3891
شگل	-0.0004	0	0.0419	-0.9179	0.0961	-12.5307	273.7301
شلعاب	0.000487	0	0.0563	-1.2889	0.0878	-15.0263	333.7196
شوینده	0.000719	-0.00097	0.0287	-0.0828	0.0944	0.0597	2.3353
شیراز	0.002843	0	0.0240	-0.0526	0.0844	0.0972	3.1425
فارس	0.000609	0	0.0420	-0.6928	0.1191	-9.1964	136.192
کرماشا	0.002643	0.000213	0.0245	-0.0934	0.0847	-0.0169	3.2115
نوری	0.005314	0	0.1278	-1.0986	3.4420	22.4428	631.1812
وپترو	0.001713	0	0.0308	-0.1790	0.0950	-0.3307	3.9750

مقادیر بزرگ چولگی و کشیدگی بازده‌های لگاریتمی سهام شرکت‌ها نشان از عدم تقارن در توزیع احتمالی بازده‌های لگاریتمی سهم دارد. درحالی‌که عمده مطالعات تجربی، فرض نرمال بودن توزیع بازده را در محاسبه ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی لحاظ می‌کنند. ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی در این تحقیق تحت سه توزیع نرمال، کوشی و توزیع تجربی داده‌ها و برای هر شرکت به‌طور جداگانه محاسبه شده‌اند. به‌منظور محاسبه این مقادیر، ابتدا پارامترهای توزیعی بازده برای هر شرکت از طریق ماکسیمم‌سازی تابع درستنمایی نرمال و کوشی برآورد شده و پس از برآورد پارامترهای توزیعی بازده لگاریتمی هر سهم، مقادیر ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی برای تمامی نمادها و بر اساس هریک از توزیع‌های احتمالی محاسبه شده‌اند. **جدول ۲**، نتایج حاصل از برآورد ارزش در معرض ریسک هریک از نمادها را نشان می‌دهد.

جدول ۲- برآورد ارزش در معرض ریسک بازده‌های لگاریتمی تحت توزیع‌های احتمالی مختلف.

Table 2- Estimation of value at risk of logarithmic returns under different probability distributions.

توزیع	توزیع تجربی			توزیع نرمال			توزیع کوشی		
ضریب اطمینان	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99
پارس	0.0353	0.0456	0.048775	9.6707	12.1431	17.5575	0.2112	0.4325	2.1765
پارسان	0.0447	0.0482	0487	9.8141	12.5552	17.6970	0.2414	0.4928	2.4745
پاکشو	0.0348	0.0447	0487	9.6738	12.4162	17.5606	0.0149	0.0310	0.1593
پترول	0.0435	0.0482	0.0544	9.6930	12.4354	17.5797	0.6948	1.4244	7.1756
تاپیکو	0.0429	0.0476	0.0487	9.8712	12.5226	17.6651	0.2326	0.4767	2.4005
جمپلین	0.0397	0.0467	0.04877	9.6844	12.4268	17.5712	0.2028	0.4153	2.0902
جم	0.0344	0.0451	0.04876	9.8080	12.549	17.6906	0.0196	0.0410	0.2094
خراسان	0.0409	0.0477	0.04876	9.8361	12.5769	17.7182	0.2295	0.4710	2.3751
سپاکسا	0.0447	0.0482	0.05491	9.6750	12.4175	17.5618	0.6944	1.4278	7.2168
سپدیس	0.0442	0.0481	0.04877	9.8384	12.5792	17.7206	0.7052	1.4494	7.3153
شاراک	0.0430	0.0473	0.04875	9.7895	12.5309	17.6732	0.7092	1.4531	7.3173
شاملا	0.0430	0.0477	0.04877	9.6788	12.4212	17.5655	0.2233	0.4604	2.3286
شپارس	0.0431	0.0469	0.04878	9.7115	12.4535	17.5970	0.6916	1.4255	7.2100
شخارک	0.0322	0.0424	0.04839	9.6989	12.4410	17.5848	0.0168	0.0350	0.1781
شدوص	0.0434	0.0466	0.04875	9.7252	12.4675	17.6110	0.6926	1.4309	7.2506
شسینا	0.0463	0.0485	0.04878	9.6711	12.4163	17.558	0.2018	0.4152	2.0973
شفارس	0.0457	0.0485	0.05470	9.6739	12.4163	17.5608	0.6785	1.3964	7.0546
شفان	0.0413	0.0475	0.04878	9.6714	12.4139	17.5582	0.2139	0.4376	2.2009
شکربن	0.0447	0.0478	0.04877	9.6725	12.4149	17.5593	0.6931	1.4284	7.2237
شکلر	0.0452	0.0482	0.04963	9.7212	12.4632	17.6068	0.6903	1.4241	7.2080
شگل	0.0416	0.0461	0.04877	9.7003	12.4423	17.5860	0.2223	0.4568	2.3050
شلعاب	0.0449	0.0484	0.04886	9.6929	12.4353	17.5797	0.6881	1.4192	7.1818
شوینده	0.0440	0.0472	0.04878	9.7579	12.4994	17.6421	0.7066	1.4527	7.3338
شیراز	0.0406	0.0478	0.04879	9.8527	12.5934	17.7343	0.2335	0.4790	2.4138
فارس	0.0405	0.468	0.05150	9.7107	12.4528	17.5964	0.2242	0.4583	2.3039
کرماشا	0.0415	0.474	0.04787	9.8419	12.5826	17.7238	0.2404	0.4916	2.4717
نوری	0.0439	0.0480	0.05296	9.6805	12.4230	17.5673	0.2096	0.4280	2.1489
وپترو	0.0450	0.0481	0.05246	9.7649	12.5065	17.6492	0.7060	1.4504	7.3179

پس از برآورد ارزش در معرض ریسک برای هر نماد، مقادیر ارزش در معرض ریسک شرطی با استفاده از **رابطه (۹)** برای شرکت‌ها محاسبه شد. مقادیر بازده مورد انتظار برای هر شرکت بر اساس بزرگ‌ترین بازده تجربی مشاهده‌شده برای آن سهم در نظر گرفته شد و کارایی هریک از سهام مورد مطالعه، با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و بر اساس ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی، در سطوح اطمینان ۹۰%، ۹۵% و ۹۹% به‌دست آمده است. **جدول ۳** مقادیر کارایی سهام شرکت‌ها را بر پایه معیارهای مذکور و هم‌چنین نسبت‌های واریانس و میانگین نمونه‌ای نشان می‌دهد.

جدول ۳- مقادیر کارایی سهام بر پایه ارزش در معرض ریسک و توزیع‌های احتمال و نسبت‌های نمونه‌ای.

Table 3- Stock performance values based on value at risk and probability distributions and sample ratios.

روش برآورد ریسک / ضریب اطمینان	توزیع تجربی 0.9	توزیع تجربی 0.95	توزیع تجربی 0.99	توزیع نرمال 0.9	توزیع نرمال 0.95	توزیع نرمال 0.99	توزیع کوشی 0.9	توزیع کوشی 0.95	توزیع کوشی 0.99	نسبت‌های میانگین و واریانس نمونه‌ای
پارس	0.99	0.92	0.99	1	1	1	0.07	0.07	0.07	0.15
پارسان	0.99	0.92	0.99	0.98	0.98	0.99	0.28	0.28	0.28	0.90
پاکشو	0.99	0.94	0.99	0.99	0.99	0.99	1	1	1	0.25
پترول	0.88	0.88	0.88	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.44
تاپیکو	0.99	0.92	0.99	0.98	0.99	0.99	0.17	0.17	0.16	0.84
جمپلین	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
جم	0.99	0.96	0.99	0.98	0.98	0.99	1	1	1	0.98
خراسان	0.99	0.93	0.99	0.98	0.98	0.99	0.31	0.31	0.31	0.97
سپاکسا	0.88	0.87	0.88	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.30
سپدیس	0.99	0.93	0.99	0.98	0.98	0.99	0.13	0.13	0.13	1
شاراک	0.99	0.93	0.99	0.99	0.98	0.99	0.06	0.06	0.06	0.86
شاملا	0.99	0.88	0.99	0.99	0.99	0.99	0.07	0.06	0.06	0.37
شپارس	0.99	0.90	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.62
شخارک	1	1	1	0.99	0.99	0.99	1	1	1	0.54
شدوص	0.99	0.93	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.028	0.61
شسینا	0.99	0.87	0.99	0.99	0.99	1	0.07	0.07	0.07	0.19
شفارس	0.88	0.87	0.88	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.22
شفان	0.99	0.89	0.99	0.99	0.99	0.99	0.07	0.07	0.06	0.19
شکربن	0.99	0.88	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.20
شکلر	0.97	0.89	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.61
شگل	0.99	0.91	0.99	0.99	0.99	0.99	0.07	0.07	0.07	0.57
شلعاب	0.99	0.88	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.42
شوینده	0.99	0.91	0.99	0.99	0.99	0.99	0.02	0.02	0.02	0.83
شیراز	0.99	0.93	0.99	0.98	0.98	0.99	0.35	0.35	0.35	1
فارس	0.94	0.91	0.94	0.99	0.99	0.99	0.08	0.08	0.08	0.57
کرماشا	0.99	0.93	0.99	0.98	0.98	0.99	0.31	0.31	0.31	0.98
نوری	0.92	0.96	0.92	1	1	1	0.90	0.89	0.89	0.77
وپترو	0.92	0.90	0.92	0.99						0.78

*نتایج جدول به‌منظور کاهش بعد با دقت ۲ رقم اعشار گزارش شده‌اند.

مطابق با نتایج **جدول ۳**، مشاهده می‌شود که تا دقت ۲ رقم اعشار، درجه کارایی شرکت‌ها بر پایه ارزش در معرض ریسک، تحت توزیع‌های تجربی و نرمال، مقادیر نزدیکی را نشان می‌دهد. این نتیجه برای سطوح اطمینان مختلف برقرار است، گرچه اختلافاتی در تعداد ارقام اعشار بالاتر، بین تمامی این مقادیر وجود داشته است. نتایج برای توزیع کوشی و نسبت‌های نمونه‌ای نشان می‌دهد که کارایی شرکت‌ها تحت این توزیع و مقادیر نسبت‌های نمونه‌ای به گونه‌ای متفاوت از سایر روش‌ها به‌دست آمده و بنابراین، انتظار می‌رود که عملکرد پرتفوی حاصل از این دو روش با سایر روش‌ها نیز متفاوت باشد. **جدول ۴** نتایج برآورد مقادیر کارایی سهام شرکت‌ها را تحت معیار ارزش در معرض ریسک شرطی و تحلیل پوششی داده‌ها نشان می‌دهد.

جدول ۴- مقادیر کارایی سهام بر پایه ارزش در معرض ریسک شرطی و توزیع‌های احتمال و نسبت‌های نمونه‌ای.

Table 4- Values of stock performance based on conditional value at risk and probability distributions and sample ratios.

روش برآورد ریسک	توزیع تجربی			توزیع نرمال			توزیع کوشی			نسبت‌های میانگین
ضریب اطمینان	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	0.9	0.95	0.99	و واریانس نمونه‌ای
پارس	0.75	0.84	0.71	0.94	0.98	0.95	0.47	0.27	0.11	0.15
پارسان	0.92	0.70	0.88	0.93	0.97	0.99	0.50	0.45	0.32	0.90
پاکشو	0.94	0.87	0.67	0.90	0.96	0.98	0.60	0.52	1	0.25
پترول	0.76	0.93	0.83	0.98	0.98	0.99	0.20	0.12	0.05	0.44
تاپیکو	0.78	0.68	0.72	0.92	0.95	1	0.39	0.38	0.23	0.84
جمپلین	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
جم	0.94	0.74	0.67	0.99	0.96	0.95	1	0.89	1	0.98
خراسان	0.77	1	0.72	0.94	0.92	0.94	0.62	0.47	0.36	0.97
سپاکسا	0.66	0.99	0.85	0.96	0.92	0.97	0.23	0.11	0.03	0.30
سپدیس	0.80	0.72	0.97	0.92	0.94	0.98	0.29	0.22	0.15	1
شاراک	0.82	0.69	0.80	0.90	1	0.96	0.27	0.17	0.09	0.86
شاملا	0.73	0.86	0.93	0.99	0.95	0.97	0.32	0.33	0.10	0.37
شپارس	0.66	0.74	0.90	0.94	0.94	0.95	0.20	0.12	0.04	0.62
شخارک	0.97	0.96	0.67	0.92	0.93	0.98	0.49	1	0.83	0.54
شدوص	0.84	0.71	0.98	0.97	0.97	0.96	0.18	0.17	0.05	0.61
شسینا	0.72	0.67	0.73	0.92	0.92	0.97	0.60	0.28	0.12	0.19
شفارس	0.75	0.77	0.82	0.95	1	1	0.18	0.11	0.04	0.22
شفان	0.93	0.73	0.73	1	0.92	0.96	0.38	0.29	0.11	0.19
شکربن	0.76	0.88	0.78	0.98	0.99	0.96	0.21	0.11	0.30	0.20
شکلر	0.72	0.93	0.71	0.90	0.92	0.95	0.21	0.16	0.05	0.61
شگل	0.80	0.95	0.88	0.92	0.99	0.96	0.35	0.23	0.12	0.57
شلعاب	0.89	0.86	0.83	0.99	0.97	0.99	0.23	0.13	0.05	0.42
شوینده	0.75	0.73	0.91	0.90	0.95	0.99	0.23	0.14	0.05	0.83
شیراز	0.85	0.72	0.75	0.98	0.94	0.99	0.53	0.45	0.41	1
فارس	0.96	0.92	0.76	0.96	0.92	0.98	0.59	0.29	0.14	0.57
کرماشا	0.87	0.82	1	0.96	0.98	0.98	0.62	0.43	0.33	0.98
نوری	0.71	0.80	0.77	0.96	0.93	1	0.91	0.81	0.86	0.77
وپترو	0.73	0.95	0.65	0.90	0.99	0.98	0.21	0.19	0.07	0.78

مطابق با نتایج **جدول ۴**، مشاهده می‌شود که درجه کارایی شرکت‌ها بر پایه ارزش در معرض ریسک شرطی، تحت توزیع‌های تجربی و نرمال مقادیر نزدیکی را نشان می‌دهد؛ درحالی‌که تحت توزیع کوشی، به‌عنوان یک توزیع دم سنگین، مقادیر کارایی شرکت‌ها به‌طور قابل‌توجهی متفاوت است. هم‌چنین کارایی محاسبه‌شده از نسبت‌های نمونه‌ای میانگین و واریانس بازده نیز نشان می‌دهد که این روش، به‌طورکلی، متفاوت از سایر روش‌های برآورد ریسک عمل می‌کند و مقادیر کارایی متفاوت از سایر روش‌ها را ایجاد می‌کند. اوزان پرتفوی حاصل ازاین‌روش بر اساس نسبت کارایی هر سهم به مجموع مقادیر کارایی سهام مورد مطالعه محاسبه شده‌اند.

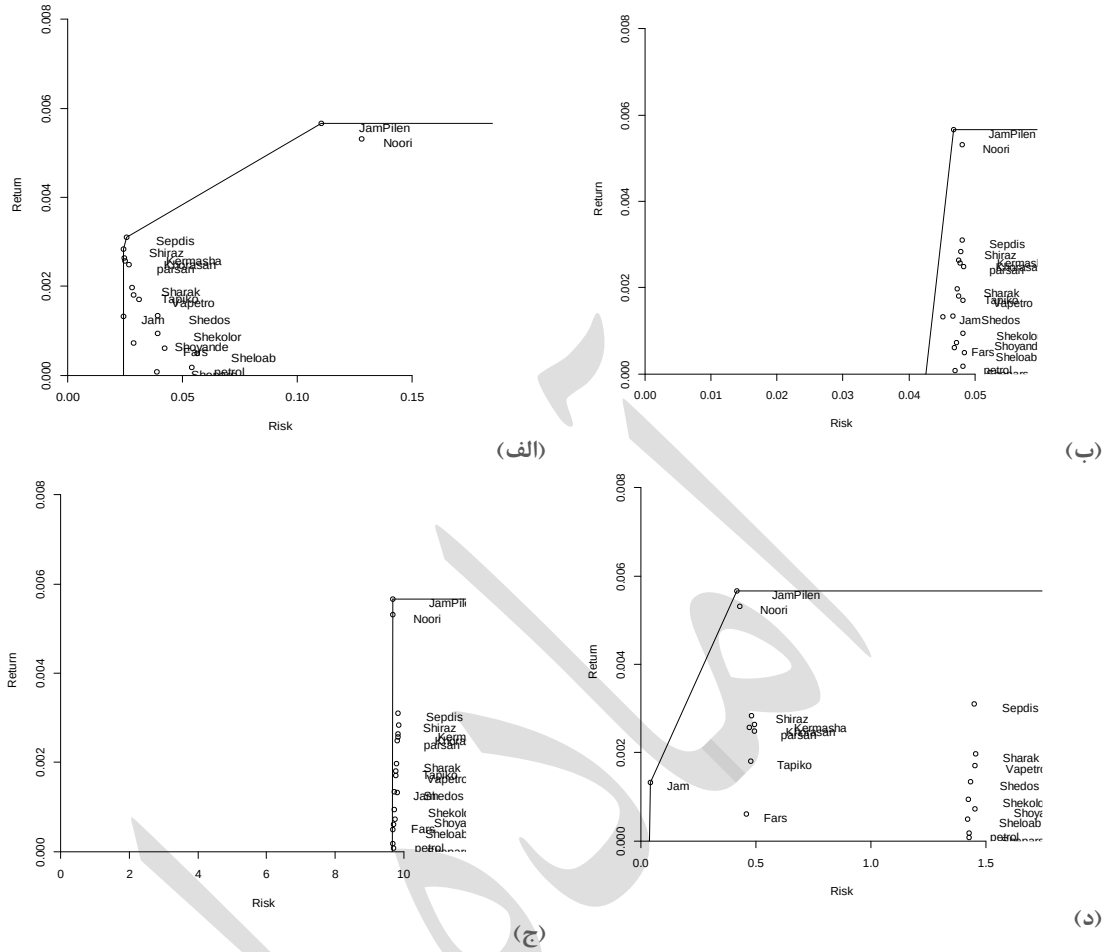
به‌منظور مقایسه عملکرد پرتفوی مبتنی بر کارایی دارایی‌های پایه و پرتفوی مارکوویتز، پس از محاسبه وزن هر سهم در پرتفوی‌های تحقیق تحت **رابطه (۸)** و نتایج حاصل از **جدول ۳** و **جدول ۴**، مقادیر بازده، ریسک و نسبت شارپ برای هریک از پرتفوی‌ها در دوره‌های نگهداری ۳، ۶ و ۱۲ ماهه محاسبه شده که نتایج آن به شرح **جدول ۵** است.

جدول ۵- عملکرد پرتفوی‌های کارای مبتنی بر ارزش در معرض ریسک تحت توزیع‌های مختلف.

Table 5- Performance of efficient value-at-risk portfolios under different distributions.

روش برآورد اوزان پرتفوی	معیار عملکرد	سطح اطمینان ۹۰%			سطح اطمینان ۹۵%			سطح اطمینان ۹۹%		
		۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه
توزیع تجربی بازده	بازده	0.097	0.314	0.298	0.097	0.314	0.314	0.097	0.314	0.298
	ریسک	0.003	0.009	0.019	0.003	0.009	0.009	0.003	0.009	0.019
	شارپ	27.453	31.621	14.990	27.314	31.789	31.789	27.453	31.621	14.990
توزیع نرمال	بازده	0.098	0.316	0.303	0.098	0.316	0.316	0.098	0.316	0.303
	ریسک	0.003	0.009	0.019	0.003	0.009	0.009	0.003	0.009	0.019
	شارپ	27.537	32.179	15.443	27.531	32.136	32.136	27.526	32.091	15.378
توزیع کوشی	بازده	0.042	0.256	0.107	0.042	0.256	0.256	0.042	0.257	0.108
	ریسک	0.006	0.020	0.020	0.006	0.020	0.020	0.006	0.020	0.020
	شارپ	6.670	12.396	5.245	6.713	12.438	12.438	6.746	12.470	5.287
نسبت‌های نمونه‌ای	بازده	-	-	-	2.202	5.107	4.592	-	-	-
	ریسک	-	-	-	0.173	0.381	0.491	-	-	-
	شارپ	-	-	-	12.720	13.400	9.339	-	-	-
مینیمم واریانس مارکوویتز	بازده	-	-	-	0.067	0.345	0.295	-	-	-
	ریسک	-	-	-	0.006	0.030	0.048	-	-	-
	شارپ	-	-	-	10.023	11.447	6.096	-	-	-

مطابق با نتایج **جدول ۵**، مشاهده می‌شود که مقادیر کارایی (نسبت شارپ) پرتفوی برای پرتفوی مبتنی بر توزیع نرمال و توزیع تجربی داده‌ها به‌طور قابل‌ملاحظه‌ای از مقادیر کارایی به‌دست‌آمده تحت توزیع کوشی و نسبت‌های نمونه‌ای متفاوت بوده‌اند. مقایسه این مقادیر نشان می‌دهد که هر واحد بازده کسب‌شده، به‌ازای هر مقدار ریسک متحمل‌شده تحت توزیع نرمال و توزیع تجربی بازده، بیش‌تر از سایر روش‌ها بوده است. هم‌چنین، مقایسه معیارهای عملکرد پرتفوی با حداقل واریانس مارکوویتز با سایر روش‌ها نشان می‌دهد که حتی توزیع کوشی نیز در سطوح اطمینان ۹۵% و ۹۹% عملکردی بهتر ازاین‌روش داشته است و پرتفوی‌هایی با میزان کارایی بیش‌تر را نشان می‌دهد.



شکل ۱- مرز کارای پرتفوی‌ها تحت روش‌های متفاوت برآورد ریسک در تحلیل پوششی داده‌ها؛ الف) نسبت‌های نمونه‌ای، ب) توزیع تجربی، ج) توزیع نرمال، د) توزیع کوشی.

Figure 1- The efficient frontier of portfolios under different methods of risk estimation in data coverage analysis; a) sample ratios, b) empirical distribution, c) normal distribution, d) cauchy distribution.

شکل ۱، تقابل ریسک-بازده در مرز کارای پرتفوی‌ها را تحت هریک از روش‌های پیشنهادی نشان می‌دهد. بر اساس این نمودار نیز مشاهده می‌شود که پرتفوی مبتنی بر توزیع تجربی و توزیع نرمال بازده، مقادیری نزدیک به مرز کارا ارایه داده‌اند، گرچه مقادیر ریسک در پرتفوی‌های حاصل از توزیع نرمال داده‌ها نسبت به سایر روش‌ها بزرگ‌تر بوده، اما محاسبه کارایی هریک از واحدهای پرتفوی سهام و تخصیص وزن به آن‌ها در پرتفوی نهایی منجر به عملکرد مطلوب‌تر این روش نسبت به سایر روش‌ها شده است. **جدول ۶**، نتایج عملکرد پرتفوی‌های سرمایه‌گذاری را برحسب ارزش در معرض ریسک شرطی در بین توزیع‌های احتمالی مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۶- عملکرد پرتفوی‌های کارا مبتنی بر ارزش در معرض ریسک شرطی تحت توزیع‌های مختلف.

Table 6- The performance of value-based efficient portfolios under conditional risk under different distributions.

روش برآورد اوزان پرتفوی	معیار عملکرد	سطح اطمینان ۹۰%			سطح اطمینان ۹۵%			سطح اطمینان ۹۹%		
		۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه
توزیع تجربی بازده	بازده	0.095	0.309	0.283	0.101	0.324	0.324	0.100	0.312	0.293
	ریسک	0.003	0.009	0.020	0.003	0.009	0.009	0.003	0.009	0.20
	شارپ	25.956	31.267	14.189	26.997	32.704	32.704	28.581	33.475	14.353
توزیع نرمال	بازده	0.098	0.314	0.300	0.098	0.316	0.316	0.099	0.315	0.301
	ریسک	0.003	0.009	0.0199	0.003	0.009	0.009	0.003	0.009	0.019
	شارپ	27.474	31.815	15.051	27.570	32.352	32.352	27.650	31.769	15.168
توزیع کوشی	بازده	0.080	0.293	0.220	0.072	0.298	0.298	0.051	0.255	0.128
	ریسک	0.004	0.012	0.021	0.004	0.014	0.014	0.005	0.018	0.020
	شارپ	18.167	23.754	10.442	15.244	20.098	20.098	8.683	13.999	6.294

جدول ۶- ادامه.

Table 6- Continued.

روش برآورد اوزان پرتفوی	معیار عملکرد	سطح اطمینان ۹۰% ۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	سطح اطمینان ۹۵% ۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه	سطح اطمینان ۹۹% ۳ ماه	۶ ماه	۱۲ ماه
نسبت‌های نمونه‌ای	بازده	-	-	-	2.169	6.019	6.769	-	-	-
	ریسک	-	-	-	0.113	0.260	0.438	-	-	-
	شارپ	-	-	-	19.042	23.113	15.436	-	-	-
مینیمم واریانس	بازده	-	-	-	0.067	0.345	0.295	-	-	-
مارکوویتز	ریسک	-	-	-	0.006	0.030	0.048	-	-	-
	شارپ	-	-	-	10.023	11.447	6.096	-	-	-

در این مورد نیز مشاهده می‌شود که پرتفوی حاصل از توزیع نرمال و توزیع تجربی داده‌ها عملکرد نهایی بهتری نسبت به سایر روش‌های تشکیل پرتفوی داشته است و این نتیجه برای تمام دوره‌های نگهداری پرتفوی و تمامی سطوح اطمینان مورد مطالعه برقرار است. با استناد به این نتایج، به نظر می‌رسد که پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام در هریک از معیارهای ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی نسبت به پرتفوی با حداقل واریانس عملکرد مطلوب‌تری دارد و توزیع احتمالی بازده در محاسبه ارزش در معرض ریسک/شرطی سهام منجر به نتایج متفاوتی در عملکرد پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام می‌شوند، به‌طوری‌که برآورد درجه کارایی شرکت‌ها بر پایه توزیع تجربی بازده و توزیع نرمال عملکرد مطلوب‌تری را از نظر نسبت شارپ در مقایسه با توزیع کوشی و نسبت‌های نمونه‌ای ارایه می‌دهد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

از مقایسه عملکرد متفاوت روش مینیمم واریانس مارکوویتز با روش پیشنهادی می‌توان نتیجه گرفت که روش‌های سنتی بهینه‌سازی پرتفوی نیاز به بازنگری در بازارهای سرمایه مختلف دارند. مشکلات نظری حاکم بر روش‌های سنتی (نظیر اهمیت برآورد تابع کواریانس بازده‌های سهام)، کارایی این روش‌ها را در بازارهای سرمایه مختلف با تردید مواجه می‌سازد، درحالی‌که استفاده از معیارهای متفاوت ریسک و لحاظ کردن درجه کارایی واحدهای تصمیم، پیش از تشکیل پرتفوی سهام، می‌تواند پرتفوی کاراتری را، از نظر نسبت شارپ، منجر شود. یافته‌های این مطالعه در جهت تایید اهمیت ریسک در تشکیل پرتفوی و نقش ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی را می‌توان با نتایج مطالعات کاظمی راشنانی و همکاران [9]، سلیمانی و وثیقی [25]، تقی‌زادگان و همکاران [27]، ناطقیان و همکاران [28]، صداقتی و همکاران [29] و عیوضلو و همکاران [30] همسو دانست. ایشان نیز در مطالعات خود شواهدی را مستند می‌کنند که محاسبه ارزش در معرض ریسک در تشکیل پرتفوی، می‌تواند نتایج عملکردی مطلوب‌تری را منجر شود. از طرفی، وجه تمایز اصلی مطالعه حاضر با تحقیقات پیشین که بر پایه تخصیص اوزان پرتفوی مبتنی بر درجه کارایی سهام شرکت‌ها شکل گرفته، نشان می‌دهد که با اعمال درجه کارایی شرکت‌ها در پرتفوی سهام می‌توان پرتفویی کاراتر از پرتفوی با حداقل واریانس مارکوویتز به‌دست آورد. نتایج مطالعات الکساندر و چرر [18] و رسول‌زاده و همکاران [24] نیز نشان از آن دارد که مرز کارایی پرتفوی را می‌توان، با اعمال شرایط جدید به مساله بهینه‌سازی پرتفوی، بهبود بخشید. درحالی‌که مطالعه رسول‌زاده و همکاران [24] مبحث کارایی و تحلیل پوششی داده‌ها را مورد توجه قرار می‌دهند، مطالعه حاضر رویکردی متفاوت به تخصیص اوزان دارایی‌ها در پرتفوی سهام داشته و از این منظر نسبت به مطالعات پیشین دارای دانش‌افزایی است.

دستاوردهای حاصل از این پژوهش را می‌توان به شرح زیر بیان کرد:

۱. ارایه یک روش نوین برای بهینه‌سازی پرتفوی سهام با استفاده از تحلیل پوششی داده‌ها و درجه کارایی سهام که از توزیع‌های بازده مختلف سهام در مدل‌سازی استفاده کرده و به نتایج بهتری نسبت به روش‌های سنتی بهینه‌سازی پرتفوی منجر شده است.

۲. اظهار نقش مهم ارزش در معرض ریسک و ارزش در معرض ریسک شرطی بر اساس توزیع‌های نرمال، کوشی و توزیع تجربی بازده سهام که به بهبود عملکرد پرتفوی منجر شده است.

۳. نشان دادن این‌که پرتفوی متنوع‌شده با درجه کارایی سهام، نسبت به پرتفوی با حداقل واریانس مارکوویتز، عملکرد مطلوب‌تری از نظر نسبت شارپ ارایه می‌دهد و نشان‌دهنده اهمیت ترکیب بهینه ارزش در معرض ریسک با کارایی سهام در ساختار پرتفوی است.

٤. تطبیق بهبودیافته روش با دیگر رویکردها و ارایه گزارش نتایج در سطوح اطمینان مختلف که نقدهای محتمل و ابهامات موجود در پژوهش‌های گذشته را بهبود می‌بخشد.

٥. افزایش درک نحوه تخصیص اوزان پرتفوی سهام با در نظر گرفتن کارایی شرکت‌ها و اهمیت ارزش در معرض ریسک که می‌تواند به شکلی مناسبی نتایجی را در مدیریت سرمایه فراهم کند.

این دستاوردها در جهت بهبود روش‌های بهینه‌سازی پرتفوی و افزایش دقت در تصمیم‌گیری‌های سرمایه‌گذاران در بازارهای مالی مختلف تاثیرگذار است.

یک محدودیت قابل توجه در این پژوهش به بررسی نمادهای موجود در گروه محصولات شیمیایی مربوط می‌شود که بیانگر پرتفوی بخشی است و ازاین‌رو، اصل تنوع‌بخشی را برآورده نمی‌کند. بر این اساس، یکی از جهت‌گیری‌های پژوهشی آتی می‌تواند بررسی رویکرد پیشنهادی در سایر گروه‌ها و مقایسه آن‌ها با نتایج پژوهش حاضر باشد. با توجه به یافته‌های این مطالعه، به‌نظر می‌رسد که مساله بهینه‌سازی پرتفوی همچنان به‌عنوان یکی از چالش‌های پیش‌روی سرمایه‌گذاران، شکاف مطالعاتی عمیقی دارد که می‌توان آن را از طریق به‌کارگیری شیوه‌های علمی کنترل و پیش‌بینی رفتار احتمالی قیمت و بازده سهام تا حدودی کاهش داد. به‌علاوه، عدم‌قطعیت داده‌ها که در این مطالعه مورد توجه قرار نگرفته است را می‌توان در پژوهش‌های آتی با استفاده از پسوندهای به‌روزتر مجموعه‌های فازی نظیر نوتروسوفیک و پلوتوژنیک مدنظر قرار داد.

منابع

[1] Markowitz, H. M. (1952). Portfolio Selection. *The journal of finance*, *7*(1), 71–91.

[2] Trichilli, Y., Abbes, M. B., & Masmoudi, A. (2020). Islamic and conventional portfolios optimization under investor sentiment states: Bayesian vs Markowitz portfolio analysis. *Research in international business and finance*, *51*, 101071. DOI:10.1016/j.ribaf.2019.101071

[3] Naccarato, A., Pierini, A., & Ferraro, G. (2021). Markowitz portfolio optimization through pairs trading cointegrated strategy in long-term investment. *Annals of operations research*, *299*(1–2), 81–99. DOI:10.1007/s10479-019-03225-y

[4] Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The journal of business*, *39*(1), 119–138.

[5] Markowitz, H. M., & Todd, G. P. (2000). *Mean-variance analysis in portfolio choice and capital markets* (Vol. 66). John Wiley & Sons.

[6] Zanjirdar, M. (2020). Overview of portfolio optimization models. *Advances in mathematical finance & applications*, *5*(4), 419–435.

[7] Chaweewanchon, A., & Chaysiri, R. (2022). Markowitz mean-variance portfolio optimization with predictive stock selection using machine learning. *International journal of financial studies*, *10*(3), 64. DOI:10.3390/ijfs10030064

[8] Hali, N. A., & Yuliati, A. (2020). Markowitz model investment portfolio optimization: a review theory. *International journal of research in community services*, *1*(3), 14–18.

[9] Kazemi-Rashnani, M., Mousavi, S., & Hajizadeh, E. (2022). Multi-asset portfolio management including fixed income securities by value at risk based models in Iran market. *Financial management strategy*, *10*(3), 43–76. (**In Persian**). https://jfm.alzahra.ac.ir/article_6626.html

[10] Ozyesil, M. (2021). *Markowitz portfolio optimization model: an application on listed firm on borsa Istanbul-30 national stock index (bist-30)* [presentation]. International Istanbul scientific research congress (pp. 52–70). https://www.researchgate.net/publication/348959673

[11] Xidonas, P., Steuer, R., & Hassapis, C. (2020). Robust portfolio optimization: a categorized bibliographic review. *Annals of operations research*, *292*(1), 533–552. DOI:10.1007/s10479-020-03630-8

[12] Ramezanian, R. S., Ahmadishadmehri, M., Razmi, M. J., & Mahdavi Adeli, M. H. (2020). The determination of the optimal portfolio of pension funds In Iran (case study: social security fund). *Monetary & financial*, *28*(22), 1–32. (**In Persian**). https://danesh24.um.ac.ir/index.php/article_39557.html?lang=en

[13] Al Janabi, M. A. M. (2021). Multivariate portfolio optimization under illiquid market prospects: a review of theoretical algorithms and practical techniques for liquidity risk management. *Journal of modelling in management*, *16*(1), 288–309. DOI:10.1108/JM2-07-2019-0178

[14] Ivanova, M., & Dospatliev, L. (2018). Application of Markowitz portfolio optimization on Bulgarian stock market from 2013 to 2016. *International journal of pure and apllied mathematics*, *117*(2), 291–307. DOI:10.12732/ijpam.v117i2.5

[15] Blume, M. E., Gültekin, M. N., & Gültekin, N. B. (2017). Validating return-generating models. In *Portfolio construction, measurement, and efficiency: essays in honor of jack treynor* (pp. 111–134). Springer.

[16] Guerard Jr, J. B., Markowitz, H., & Xu, G. (2015). Earnings forecasting in a global stock selection model and efficient portfolio construction and management. *International journal of forecasting*, *31*(2), 550–560.

[17] Gültekin, M. N., Shohfi, T. D., & Guerard, J. B. (2020). The construction of efficient portfolios: a verification of risk models for investment making. *Frontiers in applied mathematics and statistics*, *6*, 456346. DOI:10.3389/fams.2020.456346

[18] Alexander, N., & Scherer, W. (2023). Forecasting tangency portfolios and investing in the minimum euclidean distance portfolio to maximize out-of-sample sharpe ratios †. *Engineering proceedings*, *39*(1), 34. DOI:10.3390/engproc2023039034

[19] Xiao, H., Ren, T., Zhou, Z., & Liu, W. (2021). Parameter uncertainty in estimation of portfolio efficiency: Evidence from an interval diversification-consistent DEA approach. *Omega (United Kingdom)*, *103*, 102357. DOI:10.1016/j.omega.2020.102357

[20] Chyzak, F., & Nielsen, F. (2019). *A closed-form formula for the Kullback-Leibler divergence between Cauchy distributions*. http://arxiv.org/abs/1905.10965

[21] Kahramonovich, S. F. (2023). Analysis of efficient portfolio based on modern portfolio theory. *World bulletin of management and law*, *24*, 47–51.

[22] Butler, A., & Kwon, R. H. (2023). Integrating prediction in mean-variance portfolio optimization. *Quantitative finance*, *23*(3), 429–452. DOI:10.1080/14697688.2022.2162432

[23] Jensen, T. I., Kelly, B. T., Malamud, S., & Pedersen, L. H. (2022). Machine learning and the implementable efficient frontier. *SSRN electronic journal*. DOI:10.2139/ssrn.4187217

[24] Rasoulzadeh, M., Edalatpanah, S. A., Fallah, M., & Najafi, S. E. (2022). A multi-objective approach based on markowitz and DEA cross-efficiency models for the intuitionistic fuzzy portfolio selection problem. *Decision making: applications in management and engineering*, *5*(2), 241–259. DOI:10.31181/dmame0324062022e

[25] Soleymani, F., & Vasighi, M. (2022). Efficient portfolio construction by means of CVaR and k-means++ clustering analysis: Evidence from the NYSE. *International journal of finance and economics*, *27*(3), 3679–3693. (**In Persian**). DOI:10.1002/ijfe.2344

[26] Dai, Z., & Kang, J. (2022). Some new efficient mean--variance portfolio selection models. *International journal of finance & economics*, *27*(4), 4784–4796.

[27] Taghizadegan, Gh., Zomorodian, G., Fallahshams, M., & Saadi, R. (2023). Comparison of Markowitz model and DCC-tCopula-LVaR for portfolio optimization in the Tehran Stock Exchange. *Financial research journal*, *25*(1), 152–179. (**In Persian**). https://doi.org/10.22059/FRJ.2022.342896.1007333

[28] Nateghian, L., Jabbarzadeh Kangarlouei, S., & Bahri Sales, J. (2022). Evaluation of investment portfolio models in mutual fund in global financial markets (with emphasis on multi-objective meta-heuristic algorithm). *Journal of international business administration*, *5*(1), 147–166. (**In Persian**). https://jiba.tabrizu.ac.ir/article_13726.html?lang=en

[29] Sedaghati, M., Mehrara, M., Tehrani, R., & Mirlohi, M. (2022). Comparison of optimal portfolio performance based on value at risk and upside risk with conventional models. *Financial management strategy*, *10*(1), 1–30. (**In Persian**). https://jfm.alzahra.ac.ir/article_4655.html?lang=en

[30] Eyvazloo, R., Fallahpour, S., & Dehghani Ashkezari, M. (2022). Index tracking using two-tail mixed conditional value-at-risk in Tehran stock exchange. *Financial research journal*, *23*(4), 545–563. (**In Persian**). https://jfr.ut.ac.ir/article_86304.html

[31] Hamdi, A., Karimi, A., Mehrdoust, F., & Belhaouari, S. B. (2022). Portfolio selection problem using CVaR Risk measures equipped with DEA, PSO, and ICA algorithms. *Mathematics*, *10*(15), 2808. DOI:10.3390/math10152808

[32] Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *The journal of risk*, *2*(3), 21–41. DOI:10.21314/jor.2000.038