



Paper Type: Original Article



## Returns to Scale in Decision-Making Units with Integer-Valued or Mixed Inputs and Integer-Valued or Real Outputs Using Radial Models in Data Envelopment Analysis

Zeinab Tavassoli<sup>1</sup>, Mohsen Rostami Malkhalifeh<sup>1</sup>, Farhad Hosseinzadeh Lotfi<sup>1,\*</sup> , Tofigh Allah Vianloo<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Department of Applied Mathematics, Science and Research Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran;  
tavassoli.zeinab1393@gmail.com; mohsen\_rostamy@yahoo.com; farhad@hosseinzadeh.ir; allahvianloo@yahoo.com.

### Citation:



Tavassoli, Z., Rostami Malkhalifeh, M., Hosseinzadeh Lotfi, F., & Allah Vianloo, T. (2023). Returns to scale in decision-making units with integer-valued or mixed inputs and integer-valued or real outputs using radial models in data envelopment analysis. *Journal of decisions and operations research*, 8(3), 814-831.

Received: 16/06/2022

Reviewed: 17/07/2022

Revised: 09/08/2022

Accepted: 01/10/2022

### Abstract

**Purpose:** The current paper tries to determine the type of returns to scale in a decision-making unit under the condition that integer-valued inputs or outputs are present.

**Methodology:** This paper introduces radial models for determining the value and type of Returns to Scale (RTS) in 4 scenarios, including single integer-valued input – single real output (scenario one), mixed inputs – exclusively real outputs (scenario two), exclusively integer-valued inputs – exclusively real outputs (scenario three), and exclusively integer-valued inputs – exclusively integer-valued outputs (scenario four); in each scenario, the values of the left RTS and right RTS are determined, and the RTS type is then determined on that basis. Finally, by presenting three examples based on two scenarios, namely single integer-valued input – single real output and single integer-valued input – single integer-valued output, the new method is compared with previous methods using GAMS software, and the conclusions are provided.

**Findings:** The type of returns to scale differs when integer-valued inputs or outputs are present as compared with the case where the inputs and outputs are assumed to have real values.

**Originality/Value:** This study focuses on the value and type of returns to scale for integer-valued data. For this purpose, returns to scale was modeled in 4 scenarios using input-oriented radial models, and in the fourth scenario (exclusively integer-valued inputs – exclusively integer-valued outputs), the modeling was carried out for output orientation as well. The existence of a difference between the results produced by our proposed model and those of the classical model was demonstrated through two examples, one using hypothetical data and the other real-world data.

**Keywords:** Data envelopment analysis, Integer-valued data, Left returns to scale, Right returns to scale.



Corresponding Author: farhad@hosseinzadeh.ir



Licensee: **Journal of Decisions and Operations Research**. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution (CC BY) license (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0>).



## نوع مقاله: پژوهشی

6

## بازده به مقیاس واحدهای تحت ارزیابی با ورودی صحیح یا ورودی ترکیبی و خروجی حقیقی یا صحیح به کمک مدل‌های شعاعی در تحلیل پوششی داده‌ها

زینب توسلی<sup>۱</sup>، محسن رستمی مال خلیفه<sup>۱</sup>، فرهاد حسین‌زاده لطفی<sup>۱\*</sup>، توفیق الله ویرانلو<sup>۱</sup>  
<sup>۱</sup>گروه ریاضی کاربردی، واحد علوم و تحقیقات، دانشگاه آزاد اسلامی تهران، ایران.

### چکیده

**هدف:** این مقاله به تشخیص نوع بازده به مقیاس یک واحد تصمیم‌گیرنده با شرط وجود ورودی یا خروجی صحیح مقدار پرداخته است.

**روش‌شناسی پژوهش:** این مقاله به معرفی مدل‌های شعاعی برای تعیین مقدار و نوع بازده به مقیاس در چهار حالت: تک‌ورودی صحیح-مقدار - تک‌خروجی حقیقی مقدار (حالت اول)، ورودی‌ها ترکیبی - همه خروجی‌ها حقیقی مقدار (حالت دوم)، همه ورودی‌ها صحیح مقدار - همه خروجی‌ها حقیقی مقدار (حالت سوم) و همه ورودی‌ها صحیح مقدار - همه خروجی‌ها صحیح مقدار (حالت چهارم) پرداخته است. در حالت چهارم ماهیت خروجی نیز بررسی شده است. در هر حالت مقدار بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست تعیین و با توجه به آن نوع بازده به مقیاس مشخص شده است. در انتها با ۳ مثال در دو حالت تک‌ورودی صحیح مقدار - تک‌خروجی حقیقی مقدار و تک-ورودی صحیح مقدار - تک‌خروجی صحیح مقدار به مقایسه روش جدید و روش‌های قبلی با استفاده از نرم‌افزار GAMS پرداخته و نتیجه‌گیری شده است.

**یافته‌ها:** نوع بازده به مقیاس در حالتی که ورودی یا خروجی صحیح مقدار وجود دارد، متفاوت با حالتی است که ورودی و خروجی را حقیقی مقدار فرض می‌کنند.

**اصالت/ارزش افزوده علمی:** در این مقاله به تعیین مقدار و نوع بازده به مقیاس برای داده‌های صحیح توجه شده است. به این منظور بازده به مقیاس در چهار حالت به کمک مدل‌های شعاعی در ماهیت ورودی مدل‌سازی گردیده و در حالت چهارم (همه ورودی‌ها صحیح مقدار - همه خروجی‌ها صحیح مقدار) مدل‌سازی در ماهیت خروجی نیز مورد بررسی قرار گرفته است. وجود تفاوت در نتایج حاصل از مدل پیشنهادی و مدل کلاسیک با مثال با داده فرضی و مثال با داده واقعی نشان داده شده است.

کلیدواژه‌ها: بازده به مقیاس چپ، بازده به مقیاس راست، تحلیل پوششی داده‌ها، داده‌های صحیح.

### ۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها اولین بار با معرفی مدل‌های  $CCR$  و  $BCC$  برای اندازه‌گیری نسبی واحدهای تصمیم‌گیری، معرفی شده است [1]، [2]. بازده به مقیاس، (یکی از شاخص‌های مهم در تحلیل پوششی داده‌ها) بیانگر پیوند بین تغییرات ورودی‌ها و خروجی‌های یک سیستم است. یکی از توانایی‌های روش تحلیل پوششی داده‌ها، کاربرد الگوهای مختلف متناظر با بازده به مقیاس‌های متفاوت و همچنین اندازه‌گیری بازده به مقیاس واحدهاست [3]. بنکر [4] در بحث بازده به مقیاس نشان داده است که چطور فرمول‌های  $CCR$  می‌توانند برای تخمین  $MPSS$  و بازده به مقیاس به کار گرفته شوند؛ بنکر و ترال [5] مدل‌هایی ارائه داده‌اند که با تخمین تجربی مرز و تحت حالت کلی جواب‌های

\* نویسنده مسئول

farhad@hosseinzadeh.ir





غیر منحصربه‌فرد بازده به مقیاس را محاسبه می‌کند. همچنین بنکر و همکاران [6] سال‌ها بعد به محاسبه بازده به مقیاس و تعیین نوع آن در مدل‌های مختلف ( $BCC, CCR$ ) در ماهیت ورودی و مضرری<sup>۱</sup> در ماهیت خروجی و جمعی<sup>۲</sup> پرداختند.

گولانی و گینگ [7] با استفاده از  $BCC$  در دو ماهیت بازده به مقیاس را محاسبه می‌کنند. فوکویاما [8] کران‌های بالا و پایین کشش مقیاس را به‌دست آورده است و در مورد نوع کشش مقیاس و چگونگی این نتیجه‌گیری با استفاده از مقدار کمی، بحث می‌کند. جهان‌شاهلو و همکاران [9] در مقاله‌ای روشی برای شناسایی مرز کارایی معرفی می‌کنند. سپس، اندازه بازده به مقیاس<sup>۳</sup> و مشخصه‌های  $DMU^4$  را با استفاده از معادله مرز کارایی تولید مشخص می‌کنند. اله‌یار و رستمی مال‌خلیفه [10] برآورد بازده به مقیاس در تجزیه و تحلیل پوششی داده‌ها ( $DEA$ )، ارایه‌شده توسط گولانی را بررسی نمودند و روش جدیدی را برای انجام این برآورد ارایه می‌دهند. آن‌ها نشان می‌دهند که روش جدید کاستی روش قبلی را ندارد؛ علاوه بر این، قادر است در هر شرایطی بازده به مقیاس را در سمت راست و چپ واحد داده‌شده ارزیابی کند. همچنین در مقاله‌ای دیگر [11] نسبت به محاسبه بازده به مقیاس داده‌های منفی اقدام کرده و مدلی پیشنهاد داده‌اند. امیدی و همکاران [12] در مقاله‌ای به ارایه روشی برای ارزیابی بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ  $L-RTS$ <sup>۵</sup> و  $R-RTS$ <sup>۶</sup> می‌پردازند. مدل‌های این روش پیشنهادی، خطی بوده و در مورد آن‌ها مشکل پارامتری بودن، وجود ندارد؛ علاوه بر این، مدل‌های روش پیشنهادی از این مزیت برخوردارند که با انجام تغییرات جزئی روی آن‌ها و با تقسیم‌بندی مرز مجموعه امکان تولید، توانسته از آن‌ها به‌عنوان ابزاری برای ارزیابی امتداد پایداری  $RTS$  واحدهای تصمیم‌گیرنده استفاده کنند. دانشور و آدسینا [13] یک مدل اصلاح‌شده توپولوژی بازده به مقیاس متغیر مناسب در فرآیند پارامتر قوی به‌کار می‌برند تا مشکل روش‌های قبلی شبکه عصبی با مدل‌های ضعیف و تبعیض‌آمیز با عدم توانایی در تنظیم برای انتخاب سطح بهینگی را حل کنند. همچنین صالح [14] الگوریتم جدیدی برای تعیین بازده به مقیاس شبکه‌های دومرحله‌ای بیان نموده است. مطالعه‌های موردی هم در زمینه بازده به مقیاس ارایه شده است که می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

قمر و همکاران [15] کارایی و بازده به مقیاس را در استفاده از منابع کشت خیار خارج از فصل در پنجاب پاکستان، بررسی می‌کنند. سیتمورنگ [16] برای تعاونی ذخیره مالی اندونزی که تجارت در زمینه سرویس‌های مالی است، تابع تولید را مشخص نمود و سپس اقدام به بررسی عملکرد آن با استفاده از کشش مقیاس و بازده به مقیاس و فاکتورهای کشش تولید، کرده است. سیژوسکی و همکاران [17] با آنالیزهایی که انجام داده‌اند، نشان دادند که چطور تغییر فرض  $CRS$  بر اثربخشی سیاست محیطی اثرگذار است و درواقع با یک مثال در لهستان به دنبال نشان دادن تغییر چشم‌اندازهای سیاستی با استفاده از بازده به مقیاس کاهشی بودند.

همه این مقاله‌ها به بررسی بازده به مقیاس پرداخته‌اند ولی به صحیح بودن داده‌ها توجهی نشان نداده‌اند. نتایج مدل‌های ارایه شده تا زمانی که داده‌ها غیر صحیح باشند دارای اعتبار هستند؛ هر چند که از سال ۲۰۰۶، صحیح بودن داده‌ها در مدل‌های  $DEA$  مورد توجه قرار گرفته است اما بررسی بازده به مقیاس  $DMU$  با داده صحیح، تاکنون مورد بررسی قرار نگرفته است. از سال ۲۰۰۶، به داده‌های صحیح توجه ویژه‌ای شد و تلاش برای رفع اشکال‌هایی که ناشی از تقریب‌زدن و گردکردن اعداد بود، قوت گرفت.

لوزانو و ویلا [18] به معرفی مفاهیم جدید و مدل‌هایی که به‌طور صریح نگاهی به ورودی و خروجی صحیح دارند، پرداختند. سپس کاسمن و کاظمی متین [19] نواقص مدل اصلاح‌شده را رفع و مفاهیم جدید را در  $DEA$  صحیح تعریف کردند و یک مدل برای  $MILP^7$  استخراج شد. در همان سال کاظمی متین و کاسمن [20] مفهوم تحذب طبیعی را بیان کرده و مدل جدیدی برای تکنولوژی با بازده به مقیاس متغیر ارایه داده‌اند. بعد از آن مدل‌های صحیح چند هدفه معرفی می‌شوند. خضری مطلق و همکاران [21] و خضری مطلق [22] به اصلاح مدل‌ها پرداختند.

ژو و همکاران [23] هر چند مستقیم از مدل‌های داده صحیح استفاده نکرده‌اند، اما به لزوم توجه به اعداد صحیح اشاره و از مدل مضرری استفاده نموده‌اند، آنان ضمن بررسی مسائل مربوط به هوای چین و در نظر گرفتن خروجی‌های مطلوب و نامطلوب و معرفی تابع هدف با عنوان مجموع سود صفر به‌طوری‌که تبادل بین خروجی‌ها مطلوب و نامطلوب صورت بگیرد و به سمت مطلوب پیش برود، مدل خود را معرفی کردند. رن و همکاران [24] نیز در زمینه داده‌های صحیح و نامطلوب ولی فازی کار کرده و مدل خطی پیشنهاد داده‌اند. چن و

<sup>1</sup> Multiplicative

<sup>2</sup> Additive

<sup>3</sup> Returns to Scale (RTS)

<sup>4</sup> Decision Making Unit (DMU)

<sup>5</sup> Left Returns to Scale (L-RTS)

<sup>6</sup> Right Returns to Scale (R-RTS)

<sup>7</sup> Mixed Integer Linear Programming (MILP)



همکاران [25] نیز به ارایه مدل برای ابرکاری با داده‌های نامطلوب و سپس اصلاح آن برای داده‌های صحیح پرداخته‌اند. حسینی منفرد و همکاران [26] در بررسی کارایی شبکه‌های دومارحله‌ای به داده‌های صحیح توجه نشان دادند و براین اساس محاسبه اندازه کارایی را مدل سازی کردند.

طالب و راملی [27] بازده به مقیاس را بر روی یک مدل  $DEA$  ماهیت خروجی صحیح مقدار بحث می‌کنند تا نوع بازده به مقیاس (افزایشی، کاهش و ثابت) را مشخص نمایند که با دسته‌بندی امتیاز کارایی حاصل از مدل  $DEA$  مقادیر صحیح ماهیت خروجی تحت فرض بازده به مقیاس ثابت و بازده به مقیاس متغیر تعیین می‌گردد. یافته‌ها تحت دو تکنولوژی برای داده‌های تجربی دانشگاه‌های عمومی مالزی به کار گرفته شده است. همچنین طالب و همکاران [28] یک مدل چند هدفه برای داده‌های صحیح نامطلوب معرفی می‌کنند و تابع هدف را هم صحیح در نظر می‌گیرند. مدل پیشنهادی، بازده به مقیاس واحدها را با کاهش ورودی و افزایش خروجی تخمین می‌زنند. توانایی و مفید بودن این مدل پیشنهادی با داده‌های ۳۹ فرودگاه اسپانیا بررسی می‌شود و در نهایت با ۳ مدل چندهدفه که قبلاً اعتبارش تست شده است مقایسه می‌گردد. مقاله‌هایی که داده‌های صحیح و شاخص‌های  $DEA$  را بررسی نموده‌اند، هیچ‌کدام به بررسی شاخص بازده به مقیاس با توجه به داده‌های صحیح نپرداخته‌اند. مساله ایجاد شده بدین صورت است: با فرض این که مدل‌های قبلی، نوع بازده به مقیاس را درست تشخیص بدهد در مواردی که مدیر باید در نهایت برای افزایش یا کاهش ورودی یا خروجی تصمیم بگیرد. مدل‌های قبل، مقدار درست را مشخص نمی‌کنند و ممکن است یک داده غیر صحیح را برای مدیر مشخص نمایند که مدیر مجبور به تقریب یک عدد به مقدار صحیح شود. این تقریب می‌تواند در نتیجه نهایی تاثیر منفی بگذارد. در مثال‌های این مقاله خواهید دید، مدل‌های قبلی چون توجهی به صحیح بودن داده‌ها نداشت، نوع بازده به مقیاس را به درستی مشخص نمی‌کرد. به عنوان مثال وقتی مدل‌های قبلی بازده به مقیاس را افزایشی تشخیص می‌دهند، مدیر انتظار دارد در مقابل افزایش یک واحد ورودی به مقدار بیش‌تری خروجی افزایش پیدا کند. در صورتی که بازده به مقیاس ثابت یا بازده به مقیاس کاهش یافته بوده است و در مقابل یک واحد افزایش ورودی، خروجی نیز یک واحد افزایش پیدا می‌کند ثابت یا بازده به مقیاس کاهش یافته بوده است و در مقابل یک واحد افزایش ورودی، خروجی نیز یک واحد افزایش پیدا می‌کند یا دیگر واحد تحت ارزیابی کاهش افزایش ورودی را ندارد و خروجی را کم‌تر از یک واحد افزایش می‌دهد.

مقاله حاضر در پی رفع این مشکل برآمده و به بررسی بازده به مقیاس  $DMUs$  با داده‌های صحیح پرداخته است و مشخصاً روی چهار حالت واحدهایی با تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی، یا ورودی صحیح و غیر صحیح (ترکیبی) - خروجی حقیقی و ورودی‌های صحیح - خروجی‌های حقیقی و همه‌ی ورودی‌های صحیح - همه‌ی خروجی‌های صحیح در ماهیت ورودی و حالت چهارم در ماهیت خروجی کار شده است و مدل مناسب هر حالت پیشنهاد می‌شود. بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست هر واحد در هر حالت مجزا بررسی می‌گردد.

در این مقاله بحث بدین صورت دنبال می‌شود: قسمت دو مقدمات و مفاهیم اولیه داده‌های صحیح و بازده به مقیاس، قسمت سه مدل‌های پیشنهادی و تعاریف جدید بازده به مقیاس در هر چهار حالت (حالت چهارم در دو ماهیت)، در قسمت چهار، یک مثال در حالت تک-ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی و یک مثال با داده‌های فرضی با تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی صحیح بیان شده است. نتایج مدل پیشنهادی با نتایج مدل کلاسیک مقایسه می‌گردد. همچنین به بررسی یک مثال با داده‌های واقعی و مقایسه آن با نتایج به دست آمده با مدل‌های قبلی می‌پردازد و پس از نتیجه‌گیری، پیشنهاد ارایه می‌دهد.

## ۲- مفاهیم مقدماتی

### ۲-۱- مروری بر تکنولوژی داده‌های صحیح

فرض کنید برای هر  $DMU_j, j = 1, 2, \dots, n$  که  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی به کار می‌رود و بردار ورودی‌ها و خروجی‌های هر  $DMU_j$  به صورت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$  است. خروجی‌ها و ورودی‌ها می‌توانند همگی صحیح، حقیقی یا ترکیبی از صحیح و حقیقی باشند به طور مثال  $p'$  تعداد ورودی‌های صحیح و  $q$  تعداد ورودی‌های غیر صحیح باشند، در این صورت تعداد ورودی‌ها به صورت  $m = p' + q$  است. تکنولوژی امکان تولید، وقتی همه ورودی‌ها صحیح - همه خروجی‌ها حقیقی است، به صورت زیر است:

$$T_{io} = \{ (x, y) | \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_j \geq 0, \forall_j x_{io} \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, y_{ro} \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, i \in \mathbb{I}, r \in \mathbb{R} \}. \quad (1)$$

و با استفاده از آن، مدل زیر برای محاسبه کارایی پیشنهاد می شود:

$$\begin{aligned} \min \theta - \varepsilon \left( \sum_{i=1}^p s_i^- + \sum_{i=1}^q s_i^- + \sum_{i=1}^s s_r^+ \right), \\ s.t. \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp}, \quad r \in \mathbb{R}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} + s_i^- = x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ \theta x_{ip} - s_i^- = x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geq 0, x_i \in \mathbb{I}, s_i^-, s_i^+, s_r^+ \geq 0. \end{aligned} \quad (2)$$

که  $\varepsilon$  یک عدد غیرارشمیدسی است و  $(x_{ip}, y_{rp} + s_r^+)$  مرجع واحد مورد بررسی  $(x_{ip}, y_{rp})$  است [19].

اگر خروجی صحیح مقدار است، قیدهای  $y_{rp} + s_r^+ = y_{rp} \quad r \in \mathbb{I}$ ،  $y_{rp} + s_r^+ = y_{rp} \quad r \in \mathbb{I}$  به مجموعه قیود اضافه می شود و اگر خروجی حقیقی مقدار در داده ها نیست، قید  $\sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} - s_r^+ = y_{rp} \quad r \in \mathbb{R}$  از مجموعه قیود حذف می شود.

## ۲-۲- بازده به مقیاس

فرض کنید برای هر  $DMU_j, j=1,2,\dots,n$  که  $m$  ورودی برای تولید  $s$  خروجی به کار می رود، بردار ورودی ها و خروجی های هر  $DMU_j$  به صورت  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), y = (y_1, y_2, \dots, y_s)$  است. مجموعه امکان تولید  $BCC$  به صورت زیر است:

$$T_V = \{ (x, y) | \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_j \geq 0, \forall_j x \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j, y \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \}.$$

$\partial T_V$  که  $(x_p, y_p) \in \partial T_V$  مرز  $PPS$  است. واحدها را به مرز تصویر می نماید و نوع بازده به مقیاس را مشخص می کند. بازده به مقیاس خاصیت موضعی دارد؛ تغییرات ورودی را در اطراف هر  $DMU$  بررسی می کند.

در ادامه  $\alpha(\beta)$  را به صورت زیر تعریف می کند:

فرض کنیم  $\beta > 0$  مقدار ثابتی است، آن گاه

$$\alpha(\beta) = \max \{ \alpha | (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_v \}. \quad (3)$$

با محفوظ داشتن تعریف  $\alpha(\beta)$ ، اگر

$$\lim_{\beta \rightarrow 1} \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} = \gamma. \quad (4)$$

در این صورت اگر:

$\gamma > 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد  $IRS^1$ .

$\gamma > 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد  $DRS^2$ . (5)

$\gamma = 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس ثابت دارد  $CRS^3$ .

همچنین در صورتی که حد (4) موجود نیست با توجه به قطعه خطی بودن  $PPS$  حد راست و چپ موجود است و قوانین زیر برای تعیین بازده به مقیاس برقرار است:

$\gamma^+ > 1, \gamma^- > 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد.

$\gamma^+ < 1, \gamma^- < 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد. (6)

$\gamma^+ < 1, \gamma^- > 1$  آن گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس ثابت دارد.

<sup>1</sup> Increasing Returns to Scale

<sup>2</sup> Decreasing Returns to Scale (DRS)

<sup>3</sup> Constant Returns to Scale (CRS)





روش‌های بسیاری برای محاسبه بازده به مقیاس با داده‌های حقیقی پیشنهاد گردیده، اما در مورد داده‌های صحیح، به این موضوع پرداخته نشده است. با توجه به این که نوع بازده به مقیاس به مدیر نشان می‌دهد که نیاز در تغییر ورودی‌ها و خروجی‌ها برای رسیدن به هدف مطلوب است یا نیست و نیز مقدار این تغییر با مدل‌های موجود (که احتمالا این مدل‌ها نیز با توجه به صحیح بودن داده‌ها نیاز به تغییر دارند) مشخص می‌گردد؛ اگر صحیح بودن داده‌ها در نظر گرفته نشود، هم در تعیین نوع بازده به مقیاس و هم در ادامه در تعیین مقدار تغییر، مدیر گمراه می‌شود. از این رو در ادامه روش پیشنهادی برای محاسبه بازده به مقیاس در داده‌های صحیح ارایه می‌گردد.

### ۳- روش پیشنهادی

#### ۳-۱- تعریف بازده به مقیاس

برای محاسبه بازده به مقیاس در داده‌های صحیح میزان تغییرات خروجی را نسبت به میزان تغییرات ورودی می‌سنجیم، پاسخ به این پرسش "اگر ورودی به نزدیک‌ترین ورودی (مشخصا) صحیح تغییر پیدا کند، نسبت تغییرات خروجی به ورودی چه مقدار می‌شود؟" تعریف و مدل‌های جدید را پایه‌ریزی می‌کند.

را همانند قبل به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \max \{ \alpha | (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_{iv} \}. \quad (7)$$

که  $x_{ip}$  به  $\beta x_{ip}$  که یک عدد صحیح و  $y_{ip}$  به  $\alpha(\beta)y_{ip}$  که یک عدد حقیقی است، تبدیل می‌کند.  $T_{iv}$  همان تعریف رابطه (۱) است. در این صورت داریم:

$$\frac{\alpha(\beta)y - y}{\beta x - x} = \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{y}{x} \quad (8)$$

که  $\frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1}$  را نسبت تغییرات خروجی به ورودی می‌نامیم و با  $\gamma$  نشان می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1}. \quad (9)$$

تفاوت رابطه (۹) با رابطه (۴) در این است که رابطه (۴) را به علت گسسته بودن PPS از (استفاده از حد) نمی‌توان استفاده کرد.

$\gamma > 1$  آن‌گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس صعودی (افزایشی) دارد.

(۱۰)  $\gamma < 1$  آن‌گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس نزولی (کاهشی) دارد.

$\gamma = 1$  آن‌گاه  $DMU_p$  بازده به مقیاس ثابت دارد.

که همانند رابطه (۵) است.

#### ۳-۲- حالت اول تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی حقیقی

$\alpha(\beta)$  را همانند قبل به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \max \{ \alpha | (\beta x_p, \alpha y_p) \in T_{iv} \}, \quad (11)$$

که  $x_p$  به  $\beta x_p$  که یک عدد صحیح و  $y_p$  به  $\alpha(\beta)y_p$  که یک عدد حقیقی است، تبدیل می‌کند. در این صورت داریم:

$$\frac{\alpha(\beta)y - y}{\beta x - x} = \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1} \cdot \frac{y}{x}.$$

که  $\frac{\alpha(\beta)-1}{\beta-1}$  را نسبت تغییرات خروجی به ورودی می‌نامیم و با  $\gamma$  نشان می‌دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha(\beta) - 1}{\beta - 1}. \quad (12)$$

همانند رابطه (۱۰) می‌توان نوع بازده به مقیاس را نتیجه گرفت.

نکته حائز اهمیت در این مساله آن است که به علت گسسته بودن PPS بازده به مقیاس باید به طور مجزا محاسبه شود؛ یعنی برای بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست مدل مجزا پیشنهاد شود و رابطه (۱۰) برای هر بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ نیز به طور

مجزا برقرار است. مقدار تغییر ورودی صحیح هر  $DMU$  را از مدل‌های زیر تعیین می‌کنیم. ورودی بعد از تغییر، مجدداً عددی صحیح است. برای محاسبه  $\beta$  در تعیین بازده به مقیاس راست از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \min \beta \\ \text{s. t.} & \quad \beta x_p = x'_{p'} \\ & \quad x'_{p'} - x_p = 1, \\ & \quad x'_{p'} \in \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (13)$$

که  $x_p \neq 0$ .

قید  $\beta x_p = x'_{p'}$  ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به گونه‌ای که به ورودی بیشتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید  $x'_{p'} - x_p = 1$  باعث می‌شود تا نزدیک‌ترین جایگاه ورودی صحیح  $DMU_p$  را مشخص کند. ما به دنبال کم‌ترین افزایش در ورودی  $DMU_p$  هستیم، پس تابع هدف  $\min \beta$  است.  $\beta^{1*}$  مقدار بهینه مدل (۱۳) است و برای محاسبه بازده به مقیاس راست استفاده می‌شود. برای محاسبه  $\beta$  در بازده به مقیاس چپ از مدل زیر استفاده می‌کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \beta, \\ \text{s. t.} & \quad \beta x_p = x'_{p'} \\ & \quad x_p - x'_{p'} = 1, \\ & \quad x'_{p'} \in \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن  $x_p \neq 0$ .

قید  $\beta x_p = x'_{p'}$  ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می‌دهد به گونه‌ای که به ورودی کمتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید  $x_p - x'_{p'} = 1$  باعث می‌شود تا نزدیک‌ترین جایگاه ورودی صحیح  $DMU_p$  را مشخص کند. ما به دنبال کم‌ترین کاهش در ورودی  $DMU_p$  هستیم، پس مقدار  $\beta$  بیشترین مقدار ممکن است و در نتیجه تابع هدف  $\max \beta$  است.  $\beta^{2*}$  مقدار بهینه مدل (۱۴) است و برای محاسبه بازده به مقیاس چپ استفاده می‌شود.

**قضیه ۱-** در مدل (۱۳)،  $\beta$  بین ۱ تا  $\infty$  و مقدار  $\beta^{1*}$  عددی بین ۱ و ۲ است.

اثبات: نزدیک‌ترین واحد صحیح قبل از  $x'_{p'}$  است. پس  $x'_{p'} > x_p$  و در نتیجه  $\beta = \frac{x'_{p'}}{x_p} > 1$ ؛ که  $\beta = \frac{x'_{p'}}{x_p}$  یک جواب شدنی برای این مدل نیز است.

مقدار تابع هدف عددی بین ۱ تا  $\infty$  است، چرا که  $x_p < x'_{p'}$ .

و از آنجا که  $x'_p = x_p + 1$  پس مقدار  $\beta^{1*} \in (1, 2)$ .

**قضیه ۲-** در مدل (۱۴)،  $\beta$  بین ۰ تا  $\infty$  و مقدار  $\beta^{2*}$  عددی بین ۰ و ۱ است.

اثبات: نزدیک‌ترین واحد صحیح قبل از  $x'_{p'}$  است، پس  $x'_{p'} < x_p$  و در نتیجه  $\beta = \frac{x'_{p'}}{x_p} < 1$ ؛ که  $\beta = \frac{x'_{p'}}{x_p}$  یک جواب شدنی برای این مدل نیز است.

مقدار تابع هدف عددی بین ۰ تا  $\infty$  است، چرا که  $0 \leq x'_{p'} < x_p$  و از آنجا که  $x'_p = x_p - 1$  پس مقدار  $\beta^{2*} \in (0, 1)$ .

توجه داشته باشید حتی اگر واحدهای تحت ارزیابی چند ورودی داشته باشند که فقط یکی از آن‌ها صحیح است برای به‌دست آوردن مقدار بهینه  $\beta$  از مدل (۱۳) و مدل (۱۴) استفاده می‌کنیم و تنها ورودی صحیح در مدل پیشنهادی دخالت داده می‌شود. سپس میزان تغییر برای داده‌ی صحیح برای همه‌ی ورودی‌های غیر صحیح نیز اعمال می‌شود، یعنی مقدار تغییر برای ورودی صحیح در همه‌ی ورودی‌ها ضرب می‌شود.  $x_{ip}$  به  $\beta^* x_{ip}$  تبدیل می‌شود ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) و در ادامه برای به‌دست آوردن  $\alpha$  از مدل (۲۰) استفاده می‌شود.





مدل ارزیابی بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ در حالت تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی حقیقی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha, \\ & s. t. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j \leq \beta^* x_p, \quad x_p \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_j \geq \alpha y_p, \quad y_p \in \mathbb{R}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (15)$$

$\beta^*$  جواب بهینه به دست آمده از مدل (۱۳) یا مدل (۱۴) است که بر اساس این که بازده به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود. به اختصار به جای  $\beta^{*1}$  و  $\beta^{*2}$  از  $\beta^*$  استفاده می‌کنیم.

**قضیه ۳- مدل (۱۵)** شدنی است و مقدار تابع هدف برای بازده به مقیاس کاهشی نامنفی و برای بازده به مقیاس افزایشی مقدار تابع هدف بزرگ‌تر مساوی ۱ است.

اثبات: برای  $\beta^* < 1$  (مدل (۱۳)):

$$\lambda_p = \lambda_{p-1} = \frac{1}{2}, \lambda_{j \neq p-1} = 0, \beta = \overline{0/9}, \alpha = 0.$$

یک جواب شدنی این مدل است.

چون  $\alpha = 0$  یک جواب شدنی مسئله است پس  $\alpha^* \geq 0$ .

برای  $\beta^* > 1$  (مدل (۱۴)):

$$\lambda_p = 1, \lambda_{j \neq p} = 0, \beta = 1/01, \alpha = 1.$$

یک جواب شدنی این مدل است. در نتیجه  $\alpha^* \geq 1$ .

با به دست آوردن  $\beta$  و  $\alpha$  از این مدل‌ها مقدار و نوع بازده به مقیاس را با توجه به رابطه (۹) و رابطه (۱۰) به دست می‌آوریم.

توجه داشته باشید **قضیه ۱** تا **قضیه ۳** نشان می‌دهند که  $\gamma$  می‌تواند مقادیر مثبت، منفی یا صفر را اختیار کند.

در بازده به مقیاس راست  $\beta > 1$  و  $\alpha \geq 1$  پس  $\gamma \geq 0$ .

در بازده به مقیاس چپ  $\beta < 1$  و  $\alpha \geq 0$ :

پس برای  $0 \leq \alpha \leq 1$  نتیجه می‌شود  $\gamma \geq 0$ .

و برای  $\alpha \geq 1$ ، می‌توان نتیجه گرفت  $\gamma \leq 0$ .

### ۳-۲- حالت دوم: ورودی ترکیبی (ورودی صحیح و ورودی غیر صحیح) و خروجی حقیقی

با این فرض که ورودی‌های ترکیبی از صحیح و حقیقی باشند، تعریف بازده به مقیاس را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \max \left\{ \alpha \left( \begin{pmatrix} \beta x_{ip}^I \\ \beta x_{ip}^{NI} \\ \alpha y_{rp} \end{pmatrix} \in T_{iv}, i=1,2,\dots,p', i'=1,2,\dots,q, p'+q=m, r=1,2,\dots,s \right) \right\}. \quad (16)$$

مجدداً با استفاده از مدل زیر بازده به مقیاس را محاسبه می‌کنیم:

$$\gamma = \frac{\alpha\beta - 1}{\beta - 1}. \quad (17)$$

که  $\gamma$  نشان دهنده نسبت تغییرات خروجی به ورودی است، همان قوانین رابطه (۱۰) در مورد مقدار و نتیجه گیری نوع بازده به مقیاس برقرار است. مقدار تغییر ورودی صحیح هر  $DMU$  را از مدل های زیر تعیین می کنیم. ورودی بعد از تغییر، مجدداً عددی صحیح است.

برای محاسبه  $\beta$  در بازده به مقیاس راست از مدل زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} & \min \beta, \\ & \text{s. t.} \\ & \beta x_{ip} = x'_{ip}, \\ & \beta > 1, \\ & x'_{ip} \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (18)$$

که  $x_p \neq 0$

قید  $\beta x_p = x'_p$  ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می دهد به گونه ای که به ورودی بیشتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید  $\beta x_p - x'_p = 1$  از این مدل حذف شده است. چون تغییر به صورت شعاعی می باشد و چند ورودی همزمان به صورت شعاعی تغییر می کنند و ممکن است این شرط را نتوانند به صورت همزمان برای همه ورودی ها برقرار کنند. ما به دنبال کمترین افزایش در ورودی  $DMU_p$  هستیم، پس تابع هدف  $\min \beta$  است.  $\beta^*$  مقدار بهینه مدل (۱۸) است و برای محاسبه بازده به مقیاس راست استفاده می شود.

برای محاسبه  $\beta$  در بازده به مقیاس چپ از مدل زیر استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} & \max \beta, \\ & \text{s. t.} \\ & \beta x_{ip} = x'_{ip}, \\ & \beta < 1, \\ & x'_{ip} \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (19)$$

که در آن  $x_p \neq 0$

قید  $\beta x_p = x'_p$  ورودی را به یک ورودی صحیح تغییر می دهد به گونه ای که به ورودی کمتر از مقدار قبل با مقادیر صحیح تغییر وضعیت دهد. قید  $\beta x_p - x'_p = 1$  مطابق توضیحات بالا حذف شده است. ما به دنبال کمترین کاهش در ورودی  $DMU_p$  هستیم، پس تابع هدف  $\max \beta$  است.  $\beta^*$  مقدار بهینه مدل (۱۹) است و برای محاسبه بازده به مقیاس چپ استفاده می شود.

در این دو مدل به دنبال یک  $\beta$  مشترک می گردد تا همه ورودی های صحیح را به یک داده صحیح که در مدل (۱۸) کوچک تر و در مدل (۱۹) بزرگ تر از ورودی اولیه است برساند. فرض کنید ورودی های صحیح یک  $DMU$  به صورت  $x_1 = 72, x_2 = 60$  است با استفاده از مدل (۱۸)،  $\beta = 2$  به دست می آید و  $x'_1 = 144, x'_2 = 120$  می شود به ازای  $\beta = 1.3$ ،  $x'_1 = 93.6, x'_2 = 78$  به دست می آید، که ملاحظه می شود ورودی دوم صحیح عددی غیر صحیح است؛ پس مدل به دنبال  $\beta$  است که هر دو ورودی صحیح را به مقداری صحیح تغییر دهد.

مدل پیشنهادی برای تعیین نوع بازده به مقیاس به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha, \\ & \text{s. t.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, i = 1, 2, 3, \dots, p'. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}, \quad i' \in N \setminus \mathbb{I}, i' = 1, 2, 3, \dots, q. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}, \quad r \in \mathbb{R}, r = 1, 2, 3, \dots, s. \end{aligned} \quad (20)$$





$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0.$$

قید اول ورودی‌های صحیح هر واحد را به نزدیک‌ترین واحد صحیح تغییر می‌دهد و قید دوم ورودی‌های غیرصحیح را به همان اندازه کم‌ترین تغییر ورودی صحیح هر واحد تغییر می‌دهد. براساس این تغییرات بهترین خروجی ممکن نسبت به مرز کارایی با همان توضیح در حالت قبل برای این واحد تغییر یافته به‌دست می‌آید تا مقدار بازده به مقیاس برآورد شود.  $\beta^*$  جواب بهینه به‌دست آمده از مدل (۱۸) یا مدل (۱۹) است که بر اساس این که بازده به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود و به اختصار به جای  $\beta^{*1}$  و  $\beta^{*2}$  از  $\beta^*$  استفاده می‌کنیم.

### ۳-۳- حالت سوم: همه ورودی‌ها صحیح و خروجی‌ها حقیقی

اگر همه ورودی‌ها صحیح و خروجی‌ها حقیقی باشند یعنی  $x_i^{\mathbb{I}}, i = 1, 2, \dots, m$ ،  $y_r^{\mathbb{R}}, r = 1, 2, \dots, s$ ، میزان تغییرات  $x_i^{\mathbb{I}}$  را  $\beta$  نمایش می‌دهیم و با مدل (۱۷) و مدل (۱۸) به‌دست می‌آوریم چرا که تمام ورودی‌ها در این حالت صحیح هستند.

$\alpha(\beta)$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \max \left\{ \alpha \mid \left( \frac{\beta x_{ip}^{\mathbb{I}}}{\alpha y_{rp}^{\mathbb{I}}} \right) \in T_{iv}, i = 1, 2, \dots, m \quad r = 1, 2, \dots, s \right\}. \quad (21)$$

نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی را با استفاده از رابطه (۹) محاسبه می‌کنیم. مجدداً مقایسه  $\gamma$  با ۱ را در رابطه (۱۰) برای تعیین نوع بازده به مقیاس را می‌پذیریم. مدل پیشنهادی برای این حالت به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha, \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}, \quad r \in \mathbb{R}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ & \lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0. \end{aligned} \quad (22)$$

این مدل همانند مدل‌های قبل مقدار  $\alpha$  را محاسبه می‌کند و تعاریف قبل متناسب با مدل‌ها برقرار است.

### ۳-۴- حالت چهارم: همه ورودی‌ها صحیح-همه خروجی‌ها صحیح

اگر همه ورودی‌ها صحیح و خروجی حقیقی باشند یعنی  $x_i^{\mathbb{I}}, i = 1, 2, \dots, m$ ،  $y_r^{\mathbb{R}}, r = 1, 2, \dots, s$ ، میزان تغییرات  $x_i^{\mathbb{I}}$  را  $\beta$  نمایش می‌دهیم و با مدل (۱۷) و مدل (۱۸) به‌دست می‌آوریم.  $\alpha(\beta)$  را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\alpha(\beta) = \max \left\{ \alpha \mid \left( \frac{\beta x_{ip}^{\mathbb{I}}}{\alpha y_{rp}^{\mathbb{I}}} \right) \in T_{iv}, i = 1, 2, \dots, m \quad r = 1, 2, \dots, s \right\}. \quad (23)$$

نسبت تغییرات خروجی به ورودی را با استفاده از رابطه (۹) محاسبه می‌کنیم.

مجدداً با مقایسه  $\gamma$  با ۱ در رابطه (۱۰) برای تعیین نوع بازده به مقیاس را می‌پذیریم.

مدل ارزیابی بازده به مقیاس در حالت ورودی صحیح - خروجی صحیح به‌صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha, \\ & \text{s.t.} \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta^* x_{ip}, \quad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \alpha y_{rp}, \quad r \in \mathbb{I}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\alpha y_{rp} = y'_{rp}, \quad r \in \mathbb{I},$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1,$$

$$\lambda_j \geq 0, \alpha \geq 0, y'_{rp} \in \mathbb{I}.$$

نسبت به حالت قبل قید  $(y'_{rp} \in \mathbb{I}), \alpha y_{rp} = y'_{rp} \quad r \in \mathbb{I}$  را اضافه دارد که باعث می شود تغییرات خروجی را به گونه ای تنظیم کند که خروجی صحیح مقدار شود.

### ۵-۳- ماهیت خروجی بازده به مقیاس حالت چهارم: ورودی صحیح-خروجی صحیح

برای محاسبه بازده به مقیاس در داده های صحیح میزان تغییرات خروجی را نسبت به میزان تغییرات ورودی می سنجیم، پاسخ به این پرسش "اگر خروجی به نزدیک ترین خروجی (مشخصاً) صحیح تغییر پیدا کند، درصد تغییرات خروجی چه مقدار می شود؟" تعاریف و مدل های جدید را (در ماهیت خروجی) پایه ریزی می کند.

$\beta(\alpha)$  را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\beta(\alpha) = \min \left\{ \beta \mid (\beta(\alpha)x_p, \alpha y_p) \in T_{iv} \right\},$$

$$T_{iv} = \left\{ x, y \mid \exists \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \lambda_j \geq 0, \forall_j x_i \geq \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij}, y_r \leq \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj}, \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, i, r \in \mathbb{I} \right\}. \quad (25)$$

که  $\alpha y_{rp}$  به یک عدد صحیح و  $x_{ip}$  به  $\beta(\alpha)x_{ip}$  که یک عدد صحیح است، تبدیل می کند. در این صورت داریم

$$\frac{\alpha y - y}{\beta(\alpha)x - x} = \frac{(\alpha - 1)y}{(\beta(\alpha) - 1)x} = \frac{\alpha - 1}{\beta(\alpha) - 1} \cdot \frac{y}{x}.$$

که  $\frac{\alpha - 1}{\beta(\alpha) - 1}$  را نسبت تغییرات می نامیم و با  $\gamma$  نشان می دهیم.

$$\gamma = \frac{\alpha - 1}{\beta(\alpha) - 1}. \quad (26)$$

مقدار تغییر هر خروجی صحیح  $DMU$  را از مدل های زیر تعیین می کنیم. خروجی بعد از تغییر، مجدد عددی صحیح است:

$$\begin{aligned} & \max \alpha, \\ & s.t. \\ & \alpha y_{rp} = y'_{rp}, \\ & \alpha \geq 1, \\ & y'_{rp} \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \min \alpha, \\ & s.t. \\ & \alpha y_{rp} = y'_{rp}, \\ & \alpha \leq 1, \\ & y'_{rp} \in \mathbb{I}. \end{aligned} \quad (28)$$

مقدار  $\alpha^*$  با استفاده از مدل (۲۷) برای بازده به مقیاس راست و مقدار  $\alpha^{2*}$  از مدل (۲۸) برای بازده به مقیاس چپ در ماهیت خروجی تعیین می شود و بهترین خروجی صحیح را که در مدل (۲۷) بزرگ تر از خروجی اولیه و در مدل (۲۸) کوچک تر از خروجی اولیه برای واحد تحت ارزیابی می دهد به طوری که تمام خروجی های صحیح یک  $DMU$  با یک مقدار افزایش یا کاهش مشترک به یک خروجی صحیح جدید بزرگ تر یا کوچک تر از خود برسند.

مدل ارزیابی بازده به مقیاس در حالت ورودی صحیح - خروجی صحیح به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \min \beta, \\ & s.t. \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j x_{ij} \leq \beta x_{ip} \quad i \in \mathbb{I}, \\ & \sum_{j=1}^n \lambda_j y_{rj} \geq \alpha^* y_{rp} \quad r \in \mathbb{I}, \\ & \beta x_{ip} = x'_{rp} \quad r \in \mathbb{I}, \\ & \beta > 1, \end{aligned} \quad (29)$$





$$\sum_{j=1}^n \lambda_j = 1, \\ \lambda_j \geq 0, \beta \geq 0.$$

$\alpha^*$  جواب بهینه به‌دست آمده از مدل (۱۷) یا مدل (۱۸) است که براساس این که بازده به مقیاس چپ یا بازده به مقیاس راست بخواهد محاسبه شود از مدل‌های مربوط نتیجه می‌شود و به اختصار به جای  $\alpha^{*1}$  و  $\alpha^{*2}$  از  $\alpha^*$  استفاده می‌کنیم. دلیل استفاده از  $max$ ، یافتن بیش‌ترین خروجی به خروجی مورد نظر است. قید  $\beta > 1$  به‌علت پیشگیری از نشدنی بودن بازده به مقیاس است و در هنگام محاسبه بازده به مقیاس کاهشی در قیود جای می‌گیرد. در بازده به مقیاس افزایشی قید  $\beta < 1$  جایگزین می‌شود. تابع هدف کم‌ترین میزان  $\beta$  را نسبت به  $\alpha$  محاسبه شده از مدل (۲۷) و مدل (۲۸) می‌دهد، تا خروجی مورد نظر با کم‌ترین ورودی ممکن تولید شود.

#### ۴- مثال

##### ۴-۱- تک‌خروجی صحیح- تک‌ورودی حقیقی

یک شرکت فرضی با یک ورودی صحیح- یک خروجی حقیقی با ۱۴ تا  $DMU$  در نظر گرفته شده‌است (می‌توان چنین فرض کرد در یک شرکت بزرگ با خدمات تایپ با ۱۴ زیرمجموعه، ورودی تعداد کامپیوتر هر شرکت کوچک و خروجی میزان درآمد در ماه به میلیون است). اطلاعات مربوط به ورودی و خروجی هر  $DMU$  در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- اطلاعات واحدهای تحت ارزیابی (مقدار ورودی و مقدار خروجی).

Table 1- Data of the units under evaluation (input-output).

| DMU | A | B   | C | D | E    | F    | G  | H  | I  | J    | K    | L    | M    | N    |
|-----|---|-----|---|---|------|------|----|----|----|------|------|------|------|------|
| x   | 4 | 5   | 5 | 6 | 8    | 9    | 10 | 12 | 13 | 16   | 18   | 21   | 22   | 24   |
| y   | 2 | 5.8 | 6 | 9 | 10.5 | 12.7 | 15 | 16 | 17 | 17.1 | 18.3 | 18.2 | 18.8 | 18.8 |

در شکل ۱ همه  $DMUs$  نمایش داده شده‌اند؛ محور  $x$  محور ورودی و محور  $y$ ، محور خروجی است، خطوط خاکستری پررنگ  $PPS$  است. خطوط خط چین، مرز با داده‌های (هم‌ورودی و هم‌خروجی) حقیقی فرضی به‌منظور بهتر نمایش دادن  $PPS$  معمول و نمایش تصاویر نقاط ناکارا و کارای ضعیف است. کارایی هر یک از این  $DMUs$  با استفاده از مدل پوششی ماهیت ورودی تک‌ورودی صحیح- تک‌خروجی حقیقی محاسبه می‌کنیم.

جدول ۲- اندازه کارایی  $DMUs$ .

Table 2- Efficiency scores of DMUs.

| DMU           | A   | B           | C   | D     | E                                              | F                                              | G   | H           | I   | J                                               | K   | L                                               | M   | N     |
|---------------|-----|-------------|-----|-------|------------------------------------------------|------------------------------------------------|-----|-------------|-----|-------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------|-----|-------|
| مرجع          | A   | C           | C   | D     | $E' = \begin{bmatrix} 7 \\ 10.5 \end{bmatrix}$ | $F' = \begin{bmatrix} 9 \\ 13.5 \end{bmatrix}$ | G   | H           | I   | $J' = \begin{bmatrix} 14 \\ 17.1 \end{bmatrix}$ | K   | $L' = \begin{bmatrix} 18 \\ 18.2 \end{bmatrix}$ | M   | M     |
| اندازه کارایی | 1   | 1           | 1   | 0.875 | 1                                              | 1                                              | 1   | 1           | 1   | 0.875                                           | 1   | 0.875                                           | 1   | 0.917 |
| مقدار         | همه | $s_o = 0.2$ | همه | همه   | همه                                            | $s_o = 0.8$                                    | همه | $s_i = 0.5$ | همه | $s_i = 0.6$                                     | همه | $s_i = 0.4$                                     | همه | همه   |
| اسلک          | صفر | صفر         | صفر | صفر   | صفر                                            | بقیه                                           | صفر | بقیه        | صفر | بقیه                                            | صفر | صفر                                             | صفر | صفر   |

مقدار  $\gamma$  با استفاده از مدل پیشنهادی (۱۲) به‌صورت زیر حاصل می‌شود و نوع بازده به مقیاس با استفاده از رابطه (۱۰) تعیین می‌شود.

جدول ۳- مقدار بازده به مقیاس چپ و راست.

Table 3- Left and right RTS values.

| DMU        | A     | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   | I   | J    | K   | L    | M   | N   |
|------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|
| $\gamma^+$ | 8     | 2.8 | 2.5 | 1   | 2.3 | 1.6 | 0.4 | 0.8 | 0.2 | 0.9  | 0.1 | 0.7  | 0   | 0   |
| RTS        | IRS   | IRS | IRS | CRS | IRS | IRS | DRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |
| $\gamma^-$ | -     | 3.3 | 3.3 | 2   | 0   | 0.5 | 1   | 0.2 | 0.5 | -0.4 | 0.3 | -0.4 | 0.1 | 0   |
| RTS        | نشدنی | IRS | IRS | IRS | DRS | DRS | CRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |

ملاحظه می‌شود ترتیب بازده به مقیاس افزایشی، ثابت و کاهشی، همانند قبل و مدل‌های دیگر  $DEA$  با داده‌های حقیقی، رعایت نشده است.



دو  $DMU$  که بازده به مقیاس ثابت دارند ( $D, G$ ) بر روی خطی (فرضی) قرار دارند که اگر داده‌ها حقیقی بودند نقش  $MPSS$  می‌گرفتند.

بازده به مقیاس چپ واحد  $C$  افزایشی و بازده به مقیاس راست  $G$  کاهششی است که به این علت است که این دو واحد در دو سمت پاره خطی است که بر روی خط فرضی که از مبدا می‌گذرد و در  $DEA$  حقیقی نقش  $MPSS$  دارد، قرار دارند.

می‌دانیم که  $RTS$  یک شاخص موضعی است، واحدی که نوع بازده به مقیاس هر  $DMU$  نسبت به آن سنجیده می‌شود و از مدل (۱۳) تا مدل (۱۵) به دست آمده است، در جدول ۴ آورده شده است.

جدول ۴- واحد نزدیک به  $DMU$  جهت بررسی بازده به مقیاس.

Table 4- Unit close to the  $DMU$  for evaluating the  $RTS$ .

| $DMU$       | A  | B | C | D    | E    | F  | G    | H    | I    | J    | K    | L    | M    | N    |
|-------------|----|---|---|------|------|----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\beta^+x$  | 5  | 6 | 6 | 7    | 8    | 10 | 12   | 15   | 16   | 17   | 22   | 22   | 27   | 27   |
| $\alpha^+y$ | 6  | 9 | 9 | 10.5 | 12   | 15 | 16.3 | 17.5 | 17.8 | 18   | 18.8 | 18.8 | 18.8 | 18.8 |
| $\beta^-x$  | 3  | 4 | 4 | 5    | 7    | 8  | 9    | 11   | 12   | 15   | 17   | 20   | 21   | 23   |
| $\alpha^-y$ | -2 | 2 | 2 | 6    | 10.5 | 12 | 13.5 | 15.7 | 16.3 | 17.5 | 18   | 18.6 | 18.7 | 18.8 |

همان‌طور که در نتایج جدول و خطوط ترسیم شده در شکل ۱ دیده می‌شود واحدهای ناکارای  $I, J$  و  $F$  ابتداء به بیش‌ترین مقدار خروجی روی مرز تصویر می‌شوند و سپس مقدار ورودی آن‌ها برای محاسبه بازده به مقیاس راست و بازده به مقیاس چپ افزایش و کاهش پیدا می‌کند و متناسب با آن مقدار خروجی مناسب را مشخص می‌کند.

## ۲-۴- مقایسه نتایج دو روش

در جدول بعدی مقدار بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست روش پیشنهادی با نوع بازده به مقیاسی که در حالت کلاسیک (عدم توجه به صحیح بودن داده‌ها) به دست آمده مقایسه شده است.

جدول ۵- مقایسه نوع بازده به مقیاس حاصل از دو روش.

Table 5- Comparison of  $RTS$  types resulted by the two methods.

| روش پیشنهادی |       |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |      |     |     |
|--------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|------|-----|-----|
| $DMU$        | A     | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H   | I   | J    | K   | L    | M   | N   |
| $\gamma^+$   | 8     | 2.8 | 2.5 | 1   | 2.3 | 1.6 | 0.4 | 0.8 | 0.2 | 0.9  | 0.1 | 0.7  | 0   | 0   |
| نوع          | IRS   | IRS | IRS | CRS | IRS | IRS | DRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |
| $\gamma^-$   | -     | 3.3 | 3.3 | 2   | 0   | 0.5 | 1   | 0.2 | 0.5 | -0.3 | 0.2 | -0.4 | 0.1 | 0   |
| نوع          | نشدنی | IRS | IRS | IRS | CRS | DRS | CRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |
| نسبت تغییرات |       |     |     |     |     |     |     |     |     |      |     |      |     |     |
| راست         | 3     | 2   | 2   | 1   | 1   | 1   | 0.5 | 0.5 | 0.2 | 0.3  | 0.1 | 0.2  | 0   | 0   |
| نوع          | IRS   | IRS | IRS | CRS | CRS | CRS | DRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |
| چپ           | -     | 2   | 2   | 2.5 | 1   | 1   | 1   | 0.4 | 0.5 | 0.2  | 0.2 | 0.1  | 0.2 | 0   |
| نوع          | نشدنی | IRS | IRS | IRS | CRS | CRS | CRS | DRS | DRS | DRS  | DRS | DRS  | DRS | DRS |

همان‌طور که دیده می‌شود در هر دو روش نوع بازده به مقیاس تفاوت‌هایی دیده می‌شود.

در شکل مشاهده می‌شود در نقطه  $F$  با یک واحد افزایش در ورودی و سپس با حداکثر مقدار افزایش به نقطه  $G$  می‌رسد و بازده به مقیاس راست افزایشی دارد (نسبت تغییرات خروجی به ورودی بیشتر از ۱ است). برای بازده به مقیاس چپ با یک واحد کاهش در ورودی به نقطه  $P$  می‌رسد. نسبت تغییرات خروجی به ورودی کمتر از ۱ است و بازده به مقیاس چپ، کاهششی است. در صورتی که  $F$  در ناحیه‌ای واقع شده است که در  $DEA$  بازده به مقیاس ثابت داشته است. مجموع مرجع  $F$  یعنی  $F'$  نیز با این که هم روی مرز  $PPS$  صحیح و هم روی خط مرز حقیقی فرضی واقع شده است، اما برای رسیدن به نقطه  $P$  و  $G$  نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی بیشتر از ۱ در هر دو مورد دارد.

در مورد نقطه  $A$  ملاحظه می‌شود که مقدار  $\alpha y$  مقداری منفی (۲-) شده است که ناشی از منفی شدن  $\alpha$  است و این اتفاق همان‌طور که در شکل ۱ دیده می‌شود بدان جهت است که در بررسی بازده به مقیاس چپ با کم شدن یک واحد خروجی، از مرز  $PPS$  خارج



می‌شویم و با کاهش خروجی به درون  $PPS$  برنمی‌گردد. یعنی منفی بودن مقدار  $\alpha$  و در نتیجه  $\alpha\gamma$  نشان از نشدنی بودن محاسبه مقدار بازده به مقیاس چپ و همچنین امکان عدم کاهش ورودی است. هر چند مقدار  $\gamma$  قابل محاسبه است.

### ۳-۴- مثالی برای حالت تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی صحیح

یک شرکت فرضی با ۱۰ واحد در نظر گرفته شده است که دارای یک ورودی صحیح-یک خروجی صحیح است. در جدول ۶ مقدار ورودی-خروجی هر واحد آورده شده است. (می‌توان شرکتی مانند مثال قبل فرض کرد با این تفاوت که این بار خروجی را تعداد کار تایپ تحویلی در روز در نظر گرفته‌ایم).

جدول ۶- اطلاعات واحدهای تحت ارزیابی (ورودی - خروجی).

Table 6- Data of the units under evaluation (input-output).

| DMU | A | B | C | D  | E  | F  | G  | H  | I  | J  |
|-----|---|---|---|----|----|----|----|----|----|----|
| x   | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  | 10 | 12 | 13 | 18 |
| y   | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 |

در شکل ۲،  $PPS$  مرتبط با این واحدها کشیده شده است. همانند قبل محور افقی ورودی و محور عمودی خروجی است. ورودی و خروجی هر دو صحیح هستند، پس  $PPS$  به صورت نقطه‌ای و گسسته است (محل تقاطع خطوط شطرنجی  $PPS$  را تشکیل می‌دهد). مقدار کارایی این واحدها به صورت جدول ۷ است.

جدول ۷- اندازه کارایی DMUs.

Table 7- Efficiency scores of DMUs.

| DMU           | A       | B       | C       | D       | E       | F       | G       | H       | I       | J       |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| مرجع          | A       | B       | C       | D       | E       | F       | G       | H       | I       | J       |
| اندازه کارایی | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       | 1       |
| مقدار اسلک    | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر | همه صفر |

تمامی واحدها کارایی قوی می‌باشند، و روی مرز  $PPS$  می‌باشند (واحدها قوی انتخاب شده‌اند چرا که اگر واحدی ناکارا است برای تعیین نوع بازده به مقیاس با تصویر واحد روی مرز نوع بازده به مقیاس مشخص می‌شود). مقدار تغییر ورودی هر  $DMU$  با استفاده از مدل (۲۴) تا مدل (۲۶) در جدول ۸ آمده است.

جدول ۸- مقدار تغییر هر DMU.

Table 8- Amount of change per DMU.

| DMU       | A     | B     | C      | D      | E     | F     | G     | H      | I      | J     |
|-----------|-------|-------|--------|--------|-------|-------|-------|--------|--------|-------|
| $\beta^+$ | 1.250 | 1.200 | 1.6667 | 1.1429 | 1.250 | 1.222 | 1.200 | 1.2500 | 1.2308 | 1.222 |
| $\beta^-$ | 0.750 | 0.800 | 0.833  | 0.8571 | 0.75  | 0.778 | 0.800 | 0.75   | 0.7692 | 0.778 |

مقدار بازده به مقیاس و واحدی که  $DMU$  مورد نظر با آن مقایسه می‌شود در جدول ۹ آمده است.

جدول ۹- واحد نزدیک به DMU جهت بررسی بازده به مقیاس.

Table 9- Unit close to the DMU for evaluating the RTS.

| DMU         | A     | B   | C   | D   | E   | F   | G   | H    | I   | J   |
|-------------|-------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|------|-----|-----|
| $\beta^+x$  | 5     | 6   | 7   | 8   | 9   | 10  | 11  | 13   | 14  | 19  |
| $\alpha^+y$ | 7     | 9   | 10  | 12  | 13  | 15  | 15  | 17   | 17  | 18  |
| $\gamma^+$  | 1.6   | 1.4 | 0.7 | 1.4 | 0.7 | 1.4 | 0   | 0.75 | 0   | 0   |
| RTS type    | IRS   | IRS | DRS | IRS | DRS | IRS | DRS | DRS  | DRS | DRS |
| $\beta^-x$  | 3     | 4   | 5   | 6   | 7   | 8   | 9   | 11   | 12  | 14  |
| $\alpha^-y$ | -2    | 5   | 6   | 9   | 10  | 12  | 13  | 15   | 16  | 17  |
| $\gamma^-$  | -     | 1.4 | 1.3 | 0.7 | 1.3 | 0.7 | 1.3 | 0.75 | 0.8 | 0.3 |
| RTS type    | نشدنی | IRS | IRS | DRS | IRS | DRS | IRS | DRS  | DRS | DRS |



ملاحظه می‌شود که ترتیب بازده به مقیاس یعنی افزایشی، ثابت و سپس کاهش ری رعایت نشده است و نوعی آشفتگی در میانه جدول دیده می‌شود که از حقیقی بودن خروجی ناشی شده است. صحیح بودن خروجی باعث می‌شود تا نسبت تغییرات خروجی به تغییرات ورودی در ناحیه‌ای که در گذشته مرتبط با CRS بوده حفظ نشود و تغییر کند. مثلاً در نقطه  $F$  ملاحظه می‌شود که از سمت راست به ازای یک واحد افزایش در ورودی تا ۲ واحد می‌تواند افزایش خروجی داشته باشد اما به ازای یک واحد کاهش ورودی، با یک واحد کاهش در خروجی در PPS قرار می‌گیرد. این واحد دارای بازده به مقیاس راست افزایشی و بازده به مقیاس چپ ثابت است.

#### ۴-۴- مثالی با داده واقعی و مقایسه نتایج حاصله با مدل‌های کلاسیک

داده‌های مساله از مقاله چاندر و همکاران [29] است که به ارزیابی ۲۹ کارخانه نساجی کانادا با استفاده از مفهوم بازده به مقیاس در DEA پرداخته است. این ۲۹ کارخانه نساجی در ۳ حوزه ریسندگی، بافندگی و رنگرزی فعالیت دارند. اطلاعات مربوط به آن‌ها در جدول ۱۰ آمده است. شرح بررسی انجام شده در مقاله چاندر و همکاران و این مقاله در ذیل آمده است. ۶ کارخانه ریسندگی، ۱۰ کارخانه بافندگی و ۱۳ کارخانه رنگرزی در صنعت نساجی کانادا مشارکت دارند؛ به ترتیب با  $D, W, S$  نمایش داده شده است. ورودی این کارخانه‌ها تعداد کارکنان (تعداد کارکنان یک عدد صحیح است، کارکنان روزمزد ندارد) و سرمایه کارخانه است. خروجی هر واحد، درآمد کارخانه است در نتیجه دو ورودی (یک ورودی صحیح، یک ورودی حقیقی) و یک خروجی حقیقی داریم. بازده به مقیاس این کارخانه‌ها با فرض حقیقی بودن تمام ورودی‌ها و خروجی در مقاله با استفاده از مدل‌های کلاسیک (مجموع  $\lambda$ ) به دست آورده شده است (چون عملکرد ۳ کارخانه متفاوت است، بازده به مقیاس را برای هر گروه مجزا حساب کرده است). سپس به ارایه مدل‌هایی و پیدا کردن مجموعه مرجع از بین واحدهایی با بازده به مقیاس ثابت پرداخته است تا مشخص کند برای واحدهای با بازده به مقیاس افزایشی با چه مقدار افزایش ورودی به میزان مطلوب خروجی می‌رسد و برای بازده به مقیاس کاهش‌ی بجای کاهش ورودی با مدل‌های پیشنهادی به دنبال راهی برای عدم کاهش یا کاهش کمتر ورودی است چرا که کاهش ورودی (مانند اخراج کارکنان) حالت مطلوبی برای کارخانه نیست. در این مقاله هدف ما تنها تعیین نوع بازده به مقیاس است، بازده به مقیاس راست و چپ را برای مقایسه به طور مجزا مجدداً برای هر گروه با استفاده از مدل‌های پیشنهادی محاسبه می‌کنیم؛ نتایج در جدول ۱۰ آمده است. ستون سوم تا چهارم جدول ۱۰ مقدار ورودی‌ها و خروجی است. ستون پنجم و ششم نوع بازده به مقیاس با استفاده از مدل جدید و ستون هفتم نوع بازده به مقیاس که در مقاله چاندر و همکاران به آن اشاره شده، نوشته شده است. همان‌طور که در جدول ۱۰ دیده می‌شود، جز چند مورد، نوع بازده به مقیاس DMUها یکسان نیست. مثلاً در واحد  $S01$ ، با مدل جدید نیز بازده به مقیاس چپ و راست افزایشی تعیین شده است و در مدل کلاسیک نیز بازده به مقیاس افزایشی است. اما در واحد  $S04$  بازده به مقیاس چپ و راست هر دو کاهش‌ی است در حالی که بازده به مقیاس ثابت برای آن مشخص شده بود. با استفاده از مدل‌های کلاسیک واحدهایی مانند  $D01, D03, D04, D07, D11, D13, S03, S06$  بازده به مقیاس افزایشی دارند اما با این مدل بازده به مقیاس چپ کاهش‌ی دارند. بازده به مقیاس  $D09$  کاهش‌ی تعیین شده اما در مدل جدید دارای بازده به مقیاس راست افزایشی است.

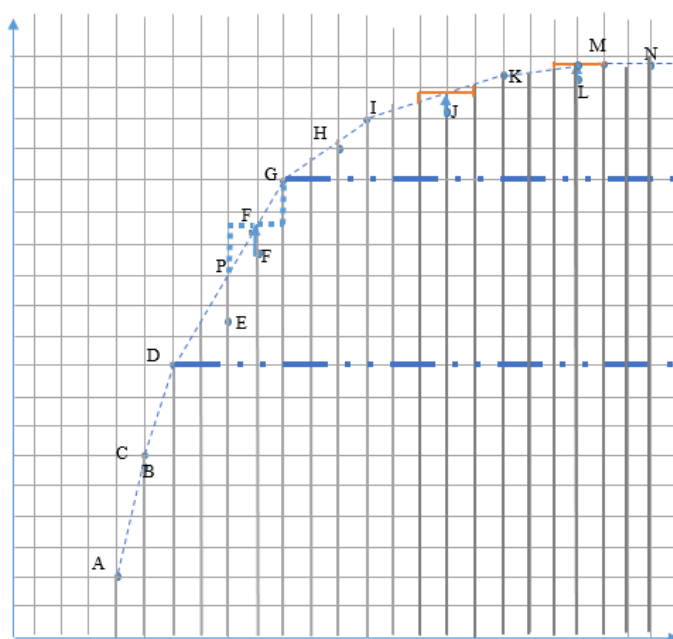
چاندر و همکاران بیان می‌کنند که با مدل‌های CCR، کارخانه  $D01$  باید کارکنان خود را از ۱۲ نفر به ۴۳۲/۶ نفر و سرمایه‌گذاری ورودی از ۵ میلیون دلار به ۲/۶۸ میلیون دلار برساند تا درآمد ۱۰ میلیون دلاری (همان درآمد قبلی) حاصل شود و چون کاهش کارکنان، مطلوب مدیر نیست، چاندر و همکاران نتیجه می‌گیرند با مدل پیشنهادی مدیر می‌تواند کارکنان را به ۹۰ نفر و سرمایه‌گذاری را به ۳۰ میلیون دلار برساند تا ۱۴ میلیون دلار درآمد داشته باشد که چگونگی رساندن این ورودی‌ها به ورودی مطلوب به اذعان خودشان خود چالش دیگری است! (هدف چاندر و همکاران تعادل بین کاهش ورودی و افزایش خروجی است و نه صحیح بودن تعداد ورودی‌ها و سعی می‌کند تا ورودی‌های هر DMU را به DMUهای کارای گروه خود برساند). البته این موضوع مورد بحث در این مقاله نیست، اما همان کاهش تعداد کارکنان به عددی غیر صحیح در نتایج مدل نشان از اهمیت طراحی و پیشنهاد مدل برای داده‌های صحیح است.

جدول ۱۰ - ورودی‌ها و خروجی ۲۹ کارخانه نساجی در کانادا و مقایسه بازده به مقیاس مشخص شده با روش پیشنهادی.

Table 10- Inputs and outputs of 29 textile mills in Canada and comparing efficiency to scale specified by the proposed method.

| ردیف | نام کارخانه | ورودی ۱<br>تعداد کارکنان | ورودی ۲<br>سرمایه | خروجی<br>درآمد | RTS - | RTS + | CLASSIC RTS |
|------|-------------|--------------------------|-------------------|----------------|-------|-------|-------------|
| 1    | S01         | 35                       | 40                | 40             | IRS   | IRS   | IRS         |
| 2    | S02         | 103                      | 500               | 1000           | IRS   | DRS   | CRS         |
| 3    | S03         | 75                       | 20                | 80             | DRS   | IRS   | IRS         |
| 4    | S04         | 200                      | 6                 | 150            | DRS   | DRS   | CRS         |
| 5    | S05         | 61                       | 20                | 175            | IRS   | DRS   | CRS         |
| 6    | S06         | 150                      | 71                | 92.35          | DRS   | IRS   | IRS         |
| 7    | W01         | 31                       | 40                | 140            | DRS   | CRS   | CRS         |
| 8    | W02         | 72                       | 60                | 135            | IRS   | DRS   | DRS         |
| 9    | W03         | 56                       | 120               | 180            | IRS   | DRS   | DRS         |
| 10   | W04         | 110                      | 150               | 500            | DRS   | CRS   | DRS         |
| 11   | W05         | 165                      | 135               | 300            | IRS   | DRS   | DRS         |
| 12   | W06         | 56                       | 200               | 100            | IRS   | DRS   | IRS         |
| 13   | W07         | 48                       | 80                | 130            | IRS   | DRS   | IRS         |
| 14   | W08         | 15                       | 67                | 170            | DRS   | IRS   | CRS         |
| 15   | W09         | 4                        | 0.85              | 5              | DRS   | IRS   | CRS         |
| 16   | W10         | 3                        | 1.2               | 2.8            | IRS   | IRS   | IRS         |
| 17   | D01         | 12                       | 5                 | 10             | DRS   | IRS   | IRS         |
| 18   | D02         | 8                        | 1                 | 6              | IRS   | IRS   | IRS         |
| 19   | D03         | 129                      | 45                | 120            | DRS   | IRS   | IRS         |
| 20   | D04         | 99                       | 60                | 87.5           | DRS   | IRS   | IRS         |
| 21   | D05         | 52                       | 8                 | 60             | IRS   | DRS   | CRS         |
| 22   | D06         | 90                       | 30                | 140            | CRS   | DRS   | CRS         |
| 23   | D07         | 132                      | 80                | 100            | DRS   | IRS   | IRS         |
| 24   | D08         | 191                      | 45                | 187.5          | DRS   | DRS   | DRS         |
| 25   | D09         | 92                       | 18                | 100            | DRS   | IRS   | DRS         |
| 26   | D10         | 150                      | 35                | 175            | DRS   | DRS   | DRS         |
| 27   | D11         | 41                       | 30                | 25             | DRS   | IRS   | IRS         |
| 28   | D12         | 15                       | 15                | 20             | IRS   | IRS   | IRS         |
| 29   | D13         | 29                       | 30                | 30             | DRS   | IRS   | IRS         |

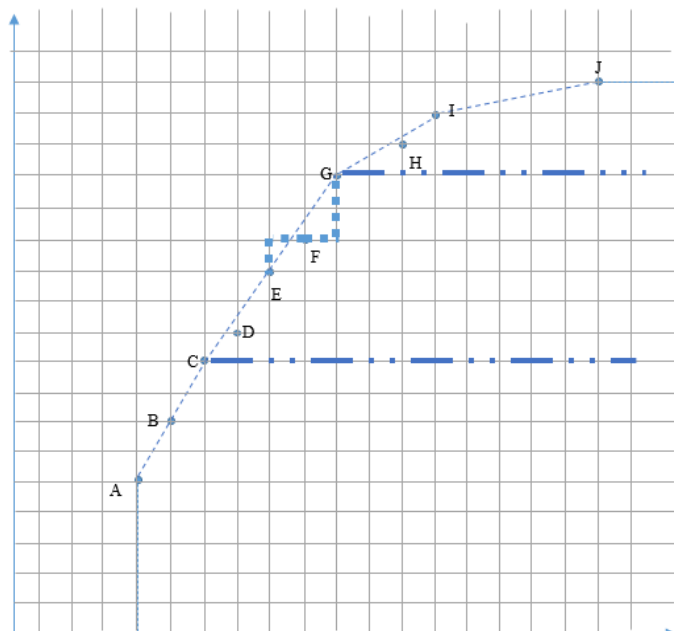
\* واحد درآمد و سرمایه میلیون دلار است.



شکل ۱ - PPS واحدهای تحت ارزیابی (تک‌ورودی صحیح-تک‌خروجی حقیقی).

Figure 1- PPS of the units under evaluation (single integer-valued input-single real output).





شکل ۲- pps واحدهای تحت ارزیابی (تک‌ورودی صحیح - تک‌خروجی صحیح).  
Figure 2- PPS of the units under evaluation (single integer-valued input-single integer output).

## ۵- بحث و نتیجه‌گیری

هدف این مقاله پیشنهاد مدلی برای تعیین نوع و مقدار بازده به مقیاس در داده‌های صحیح است، برای تعیین میزان تغییر به یک مقدار صحیح یک مدل مجزا تعریف شد و سپس واحدهای دیگر (در مدل‌هایی که ورودی غیر صحیح نیز دارند) نیز به همان میزان تغییر می‌کنند تا مقدار تغییر در ورودی‌ها به مقدار یکسان رخ دهد و واحدی که  $DMU$  برای تعیین نوع بازده به مقیاس نسبت به آن باید سنجیده شود تعیین شود. با استفاده از این مدل‌ها واحدی که  $DMU$  نسبت به آن سنجیده می‌شود یک واحد با همان ویژگی‌های واحد اصلی از لحاظ صحیح و حقیقی بودنش است و در نتیجه قابل اتکابودن نتایج بررسی بازده به مقیاس را نشان می‌دهد و می‌توان در تصمیم‌گیری از آن استفاده کرد.

همانطور که از مقایسه با شکل ۱ و شکل ۲ مشاهده می‌شود بازده به مقیاس  $DMU$  ها مطابق انتظار نیست. به‌عنوان مثال در شکل ۲ برای واحدهای  $C, D, E$  انتظار بازده به مقیاس راست و برای واحدهای  $D, E, F$  انتظار بازده به مقیاس چپ را داریم (چون روی  $MPSS$  فرضی با فرض  $PPS$  کلاسیک قرار گرفته‌اند). اما باتوجه به این‌که مرز، دیگر مرز تحذب (همانند داده‌های حقیقی) نیست، دیگر نسبت ثابت یا تغییر نسبت طبق یک الگوی منظم رخ نمی‌دهد. تفاوت‌های دیگری نیز در تعیین نوع بازده به مقیاس دیده می‌شود و دیگر رابطه (۶) که در آن با توجه به نوع بازده به مقیاس راست یا چپ بتوان یک بازده به مقیاس واحد برای  $DMUs$  تعیین کرد، صدق نمی‌کند.

با توجه به آن‌چه در این مقاله بررسی شد، بازده به مقیاس در حالت‌های بررسی شده همان روال معمول در بازده به مقیاس برای  $DMU$  ها با داده‌های حقیقی را ندارد به‌نظر می‌رسد پیدا کردن ارتباط بین بازده به مقیاس چپ و بازده به مقیاس راست همچنین روش‌های دیگر راه‌های بررسی بازده به مقیاس در داده‌های حقیقی تحقیق و پژوهشی با نتایج جالبی به‌همراه داشته است. همچنین بررسی شاخص‌های دیگر در  $DEA$  به جز بازده به مقیاس با این تعریف احتمالاً نتایج متفاوتی را حاصل کند.

## منابع مالی

برای تحقیق انجام شده، بودجه یا کمک هزینه‌ای دریافت نشده است.



نویسندگان اعلام می‌دارند که هیچ تضادی در منافع در مورد انتشار این نسخه وجود ندارد، همه نویسندگان، نسخه نهایی ارسال شده را مشاهده و تایید کرده‌اند. نویسندگان تضمین می‌کنند که مقاله، اثر اصلی آن‌ها بوده، قبلاً چاپ نشده و در حال حاضر تحت انتشار نمی‌باشد.

## قدردانی و تشکر

از انجمن ایرانی تحلیل پوششی داده‌ها به دلیل حمایت علمی از این پژوهش قدردانی می‌شود.

## منابع

- [1] Charnes, A., Cooper, W. W., & Rhodes, E. (1978). Measuring the efficiency of decision making units. *European journal of operational research*, 2(6), 429–444.
- [2] Banker, R. D., Charnes, A., & Cooper, W. W. (1984). Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. *Management science*, 30(9), 1078–1092.
- [3] Edalatpanah, S. A., Godarzi Karim, R., Khalilian, B., & Partouvi, S. (2020). Data envelopment analysis and efficiency of firms: a goal programming approach. *Innovation management and operational strategies*, 1(1), 1–16.
- [4] Banker, R. D. (1984). Estimating most productive scale size using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 17(1), 35–44.
- [5] Banker, R. D., & Thrall, R. M. (1992). Estimation of returns to scale using data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 62(1), 74–84.
- [6] Banker, R. D., Cooper, W. W., Seiford, L. M., Thrall, R. M., & Zhu, J. (2004). Returns to scale in different DEA models. *European journal of operational research*, 154(2), 345–362.
- [7] Golany, B., & Yu, G. (1997). Estimating returns to scale in DEA. *European journal of operational research*, 103(1), 28–37.
- [8] Fukuyama, H. (2000). Returns to scale and scale elasticity in data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 125(1), 93–112.
- [9] Jahanshahloo, G. R., Lotfi, F. H., & Zohrehbandian, M. (2005). Finding the efficiency score and RTS characteristic of DMUs by means of identifying the efficient frontier in DEA. *Applied mathematics and computation*, 170(2), 985–993.
- [10] Allahyar, M., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2014). An Improved Approach for Estimating Returns to Scale in DEA. *Bulletin of the malaysian mathematical sciences society*, 37, 1185–1194.
- [11] Allahyar, M., & Rostamy-Malkhalifeh, M. (2015). Negative data in data envelopment analysis: Efficiency analysis and estimating returns to scale. *Computers & industrial engineering*, 82, 78–81.
- [12] Omid, M., Rostamy-Malkhalifeh, M., Payan, A., & Hosseinzadeh Lotfi, F. (2017). Determining Left and right Returns to Scale (RTS) and RTS sustainability by using linear programming problems based on simultaneous changes in inputs and outputs. *Journal of new researches in mathematics*, 3(11), 59–80.
- [13] Daneshvar, S., & Adesina, K. A. (2018). Modified variable return to scale back-propagation neural network robust parameter optimization procedure for multi-quality processes. *Engineering optimization*, 51(8), 1352–1369.
- [14] Saleh, H., Hosseinzadeh, F., Rostamy, M., & Shafiee, M. (2020). Performance evaluation and specifying of Return to scale in network DEA. *Journal of advanced mathematical modeling*, 10(2), 309–340.
- [15] Qamar, A., Ashfaq, M., & Khan, M. T. I. (2017). Resource use efficiency and return to scale analysis in off-season cucumber production in Punjab, Pakistan. *Sarhad journal of agriculture*, 33(1), 47–52.
- [16] Situmorang, J. W. (2018). A review input factors elasticity and return to scale of cooperative: a survey on Indonesian savings-loan cooperatives. *Independent journal of management & production*, 9(4), 1274–1290.
- [17] Czyżewski, B., Smedzik-Ambroży, K., & Mrówczyńska-Kamińska, A. (2020). Impact of environmental policy on eco-efficiency in country districts in Poland: How does the decreasing return to scale change perspectives? *Environmental impact assessment review*, 84, 106431. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0195925520300561>
- [18] Lozano, S., & Villa, G. (2006). Data envelopment analysis of integer-valued inputs and outputs. *Computers & operations research*, 33(10), 3004–3014.
- [19] Kuosmanen, T., & Matin, R. K. (2009). Theory of integer-valued data envelopment analysis. *European journal of operational research*, 192(2), 658–667.
- [20] Matin, R. K., & Kuosmanen, T. (2009). Theory of integer-valued data envelopment analysis under alternative returns to scale axioms. *Omega*, 37(5), 988–995.
- [21] Khezrimotlagh, D., Salleh, S., & Mohsenpour, Z. (2012). A comment on theory of integer-valued data envelopment analysis. *Applied mathematical sciences*, 6(116), 5769–5774.
- [22] Khezrimotlagh, D. (2015). Differences between real and integer production possibility sets in data envelopment analysis. *ArXiv preprint arxiv:1501.07401*.



- [23] Zhou, Z., Guo, X., Wu, H., & Yu, J. (2018). Evaluating air quality in China based on daily data: Application of integer data envelopment analysis. *Journal of cleaner production*, 198, 304–311.
- [24] Ren, J., Chen, C., & Gao, B. (2020). Additive integer-valued DEA models with fuzzy undesirable outputs: closest benchmarking targets and super-efficiency. *IEEE access*, 8, 124857–124868. DOI:10.1109/ACCESS.2020.3007837
- [25] Chen, C., Liu, H., Tang, L., & Ren, J. (2021). A range adjusted measure of super-efficiency in integer-valued data envelopment analysis with undesirable outputs. *Journal of systems science and information*, 9(4), 378–398.
- [26] Hosseini Monfared, S. N., Hosseinzadeh Lotfi, F., Mozaffari, M. R., & Rostamy Malkhalifeh, M. (2021). Classifying flexible and integer data in two-stage network data envelopment analysis. *Journal of applied research on industrial engineering*, 8(3), 270–289.
- [27] Taleb, M., Khalid, R., & Ramli, R. (2019). Estimating the return to scale of an integer-valued data envelopment analysis model: efficiency assessment of a higher education institution. *Arab journal of basic and applied sciences*, 26(1), 144–152.
- [28] Taleb, M., Khalid, R., Ramli, R., Ghasemi, M. R., & Ignatius, J. (2022). An integrated bi-objective data envelopment analysis model for measuring returns to scale. *European journal of operational research*, 296(3), 967–979.
- [29] Chandra, P., Cooper, W. W., Li, S., & Rahman, A. (1998). Using DEA to evaluate 29 Canadian textile companies—considering returns to scale. *International journal of production economics*, 54(2), 129–141.